

Varianzminimierende Hedgingstrategien für Optionen bei möglichen Kurssprüngen

von

BARBARA GRÜNEWALD*/SIEGFRIED TRAUTMANN*

Gliederung

- 1 Einleitung
- 2 Hedging in unvollständigen Märkten
 - 2.1 Varianzminimierende Hedgingstrategie im Einperiodenmodell
 - 2.2 Lokal risikominimierende Strategie
 - 2.3 Global varianzminimierende Strategie
- 3 Varianzminimierende Hedgingstrategien im Sprung-Diffusionsmodell
 - 3.1 Der Preisprozeß
 - 3.2 Lokal risikominimierende Strategie
 - 3.3 Global varianzminimierende Strategie
 - 3.4 Lokal varianzminimierende Strategie im Modell von *Bates*
- 4 Fehlspezifizierte Hedgingstrategien im Sprung-Diffusionsmodell
 - 4.1 *Black/Scholes*-Strategie auf Basis der Diffusionsvarianz
 - 4.2 *Black/Scholes*-Strategie auf Basis der Gesamtvarianz
 - 4.3 *Mertons* Strategie bei nicht diversifizierbarer Sprungkomponente
 - 4.4 Delta-Hedging im *Bates*-Modell
- 5 Vergleich der alternativen Strategien
 - 5.1 Vergleich der Hedgeratios
 - 5.2 Vergleich der Absicherungskosten
- 6 Zusammenfassung

Anhang

Literaturverzeichnis

* Lehrstuhl für Finanzwirtschaft, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, D-55099 Mainz,
Ruf: (+ 49) 61 31/39-37 61, Fax: (+ 49) 61 31/39-37 66, E-mail: traut@fin.bwl.uni-mainz.de, gruenewa@fin.bwl.uni-mainz.de, WWW: <http://fin.bwl.uni-mainz.de/>

1 Einleitung

Extreme Kursveränderungen innerhalb weniger Stunden treten an Finanzmärkten zunehmend häufiger auf. So ist beispielsweise der Deutsche Aktienindex (DAX) am Freitag, dem 6. Dezember 1996, um etwa 5% gegenüber dem Schlußstand am Vortag gefallen. Dieser marktweite Kurseinbruch war zugegebenermaßen weit weniger dramatisch als die Börsencrashes im Oktober 1987 und Oktober 1989¹. Unter der Annahme normalverteilter DAX-Tagesrenditen mit einer annualisierten Volatilität von 18%, einem – historisch gesehen – hohen Wert, war dies dennoch ein extrem unwahrscheinlicher Kurseinbruch (ca. fünf Standardabweichungen unterhalb der erwarteten Kursrendite) mit einer Eintrittswahrscheinlichkeit von 0,00000027. Ein solches Ereignis sollte nur *einmal* in 14756 Jahren auftreten². Die DAX-Tagesrendite hat jedoch allein in den letzten zehn Jahren an deutlich mehr als zehn Börsentagen die Marke von – 5% unterschritten bzw. die Marke von + 5% überschritten.

Vor diesem Hintergrund erscheint es fragwürdig, Optionen auf den DAX oder gar auf einzelne Aktien mit dem Modell von *Black/Scholes* (1973) bewerten und/oder hedgen zu wollen. Bekanntermaßen basiert dieses klassische Modell auf der Annahme, daß Kursverlaufspfade stetig sind und einem speziellen Diffusionsmodell, einer sogenannten geometrisch *Brownschen* Bewegung, genügen. Damit sind die Kursrenditen normalverteilt. In dieser Modellwelt kann der Stillhalter einer Option durch die zeitstetige Umschichtung eines aus Basisinstrument und risikolosem Wertpapier bestehenden Hedgeportefeuilles das Zahlungsprofil der Option duplizieren und sich damit gegen die Zahlungsansprüche des Optionskäufers *perfekt* hedgen. Die Umschichtungsstrategie bzw. Hedgingstrategie ist selbstfinanzierend, weil nach der Anfangsinvestition in das Hedgeportefeuille der eventuelle Zukauf von Anteilen des Basisinstruments durch einen entsprechenden Verkauf von Anteilen des risikolosen Wertpapiers finanziert wird. Die im Hinblick auf die beobachtbaren extremen Kursänderungen realitätsnähere Modellierung von unstetigen Kursverlaufspfa-

- 1 Die drei größten DAX-Kurseinbrüche wurden an folgenden Börsentagen (jeweils Montage!) beobachtet: 16. Oktober 1989 (Kursrendite –13,71%), 19. August 1991 (–9,87%) und 19. Oktober 1987 (–9,86%). Für einzelne Aktien können aber Kurseinbrüche noch weit drastischer sein: Am Dienstag, dem 22. Oktober 1996, verlor die SAP AG im Präsenzhandel rund ein Viertel des Börsenwertes. Anlaß dafür war die Revision der Umsatz- und Ertragsersparungen für 1996 (von 45% auf 30% bis 40% Zuwachs) durch die Unternehmensleitung.
- 2 Die Eintrittswahrscheinlichkeit entspricht der von JACKWERTH/RUBINSTEIN (1996) angegebenen Wahrscheinlichkeit für den Kursrückgang des S & P 500 Index am 13. Oktober 1989. Sie unterstellen dabei eine annualisierte Volatilität von 20%. Für den dramatischen Einbruch des S & P 500 Futures-Kontraktes mit Fälligkeit Dezember 1987 von ca. 29% am Montag, dem 19. Oktober 1987, errechnen sie gar eine Eintrittswahrscheinlichkeit von 10^{-160} .

den mit zufällig auftretenden Kurssprüngen, deren Amplitude ebenfalls zufällig ist, durch einen sogenannten Sprung-Diffusionsprozeß bewirkt allerdings, daß selbst eine (faktisch nicht realisierbare) zeitstetige Duplikations- bzw. Hedgingstrategie nicht mehr selbstfinanzierend sein kann.

Um dennoch zu einer der *Black/Scholes*-Formel ähnlichen, präferenzfreien Optionsbewertungsformel zu gelangen, unterstellt nun *Merton* (1976), daß der Stillhalter einer Option das Kurssprungrisiko im Basisinstrument durch das Halten anderer Wertpapiere diversifizieren kann. Obwohl die *Mertonsche* Hedgingstrategie bei korrekter Parameterspezifikation im Mittel selbstfinanzierend ist, zeigen empirische Studien, daß die Annahme der Diversifizierbarkeit nicht haltbar ist: Kurssprünge stellen zumeist ein marktweites Phänomen dar und müssen als *systematische* Risikoquelle (zumindest innerhalb eines Marktes) angesehen werden. *Beinert/Trautmann* (1991) zeigen z. B. für den deutschen Aktienmarkt, daß nicht nur tägliche und wöchentliche Aktienrenditen, sondern auch tägliche und wöchentliche DAX-Renditen im Untersuchungszeitraum von Januar 1961 bis Dezember 1990 eine statistisch signifikante Sprungkomponente aufweisen³. Letzteres Resultat bestätigt die Vermutung, daß Kurssprünge zumeist ein den Gesamtmarkt betreffendes Phänomen sind und damit die Anwendungsbedingungen für *Mertons* Modell nicht erfüllt sind.

Der Zweck dieser Arbeit besteht nun darin, alternative Hedgingstrategien für einen europäischen Call im Rahmen eines Sprung-Diffusionsmodells mit *systematischem* Kurssprungrisiko vorzustellen und zu vergleichen. Im Mittelpunkt steht dabei die Spezialisierung der von *Schweizer* (1988, 1991) konzipierten *lokal risikominimierenden* Hedgingstrategie (LRM-Strategie), die wir auch *lokal varianzminimierend* nennen, auf die obige Prozeß-Annahme⁴. Der korrespondierende Portefeuillewert entspricht dem unter dem sogenannten minimalen Martingalmaß erwarteten, diskontierten Ausübungswert der Option. Die daraus resultierenden Implikationen für den Optionswert im Marktgleichgewicht sollen jedoch nicht im Vordergrund dieser Arbeit stehen.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt: In Abschnitt 2 werden die lokal varianzminimierende und die global varianzminimierende Hedgingstrategie im Rahmen eines einfachen, zweiperiodigen Trinomialmodells eingeführt und die Unterschiede sichtbar gemacht. Abschnitt 3 dient der Darstellung von drei unterschiedlichen, varianzminimierenden Hedgingstrategien im Sprung-Diffusionsmodell. In Abschnitt 4 werden vier fehlspezifizierte Delta-Hedgingstrategien

3 TRAUTMANN/BEINERT (1995) und BEINERT (1997) bestätigen die Ergebnisse auch für einen aktuelleren Untersuchungszeitraum.

4 FÖLLMER/SONDERMANN (1986) hatten ursprünglich diesen Ansatz für den Fall entwickelt, daß der diskontierte Aktienkursprozeß einem Martingal folgt. Letztere Eigenschaft bedeutet, daß eine Aktienanlage im Mittel nicht mehr erbringt als eine rollierende Geldmarktanlage.

vorgestellt und im anschließenden Abschnitt 5 mit den varianzminimierenden Strategien verglichen.

2 Hedging in unvollständigen Märkten

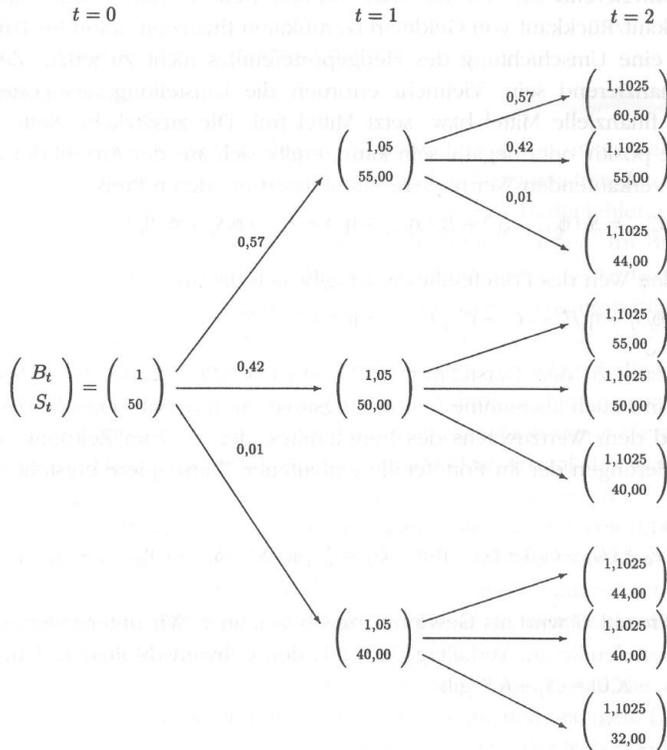
In dem klassischen Duplikationsmodell von *Black* und *Scholes* (1973) sichert sich der Stillhalter eines Calls durch eine kreditfinanzierte Position im Basisinstrument *perfekt* ab. Im Falle eines Aktiencalls besteht sein dynamisch anzupassendes Hedgeportefeuille demnach aus Aktien und leerverkauften Anteilen eines risikolosen Wertpapiers, z. B. eines Geldmarktzerifikats, dessen Wertentwicklung von der als sicher angenommenen Tagesgeldverzinsung abhängt. Die Umschichtungsstrategie ist selbstfinanzierend, weil nach der Anfangsinvestition ein Aktienkauf durch einen entsprechenden Verkauf des risikolosen Wertpapiers (und umgekehrt) finanziert wird. Der Liquidationswert des Hedgeportefeuilles am Verfalltag der Option entspricht dem Ausübungswert der Option. Im Rahmen eines *unvollständigen* Marktmodells existiert nun keine Strategie, die gleichzeitig selbstfinanzierend ist und deren Liquidationswert den Liquidationswert des geschriebenen Calls dupliziert. Eine Duplikationsstrategie erfordert vielmehr neben der Anfangsinvestition noch weitere Investitionen/Desinvestitionen am Verfalltermin oder auch davor.

DEFINITION 1: Bezeichnet C_t die bis zum Zeitpunkt t getätigten Netto-Investitionen in das Hedgeportefeuille (ohne Berücksichtigung von Zinskosten für die eingesetzten Mittel), dann steht C_0 für die Anfangsinvestition in $t=0$ und $C_t - C_0$ für die *zusätzlichen* Netto-Investitionen bis t . Die Netto-Investitionen C_t bezeichnet man auch als die bis t angefallenen *Hedgingkosten*, die Netto-Investition abzüglich der Anfangsinvestition als *Hedgefehler*. Ist der Netto-Investitionsprozeß C konstant, finden also nach $t=0$ weder Investitionen noch Desinvestitionen statt, so heißt die Hedgingstrategie *selbstfinanzierend*. Folgt C einem Martingal⁵, so heißt die Strategie *im Mittel selbstfinanzierend*.

Zum besseren Verständnis der Hedgingprinzipien, auf deren Basis die Hedgingstrategien des Abschnitts 3 entworfen werden, betrachten wir zunächst ein zweiperiodiges, Zustandsdiskretes Marktmodell mit den Handelszeitpunkten $t=0$, $t=1$ und $t=2$. Genauso wie bei dem in Abschnitt 3 betrachteten Sprung-Diffusionsmodell werden zwei Wertpapiere gehandelt: eine Aktie und ein (lokal) risikoloses Geldmarktzerifikat. Die Wertentwicklung des Geldmarktzerifikats ist durch $B_t = (1,05)^t$ gegeben. Der Zuwachs im Aktienpreis ist trinomialverteilt: bei einem heutigen Aktienkurs von $S_0 = 50$ kann der Aktienkurs zwischen zwei Handelszeitpunkten mit einer Wahrscheinlichkeit von 57%

5 D. h. in jedem Handelszeitpunkt beträgt der erwartete Zuwachs der Netto-Investition in das Hedgeportefeuille bis zu einem beliebigen zukünftigen Handelszeitpunkt null.

Abbildung 1: Preisentwicklung im Zweiperiodenmodell



um 10% steigen, mit einer Wahrscheinlichkeit von 42% gleich bleiben oder mit einer Wahrscheinlichkeit von 1% um 20% fallen. Letzteres Ereignis wollen wir als Kurssprung interpretieren. *Abbildung 1* veranschaulicht die mögliche Preisentwicklung der Aktie und des Geldmarktzertifikats.

Wie im Binomialmodell (oder im *Black/Scholes*-Modell) enthält das Hedgeportefeuille für einen verkauften Call mit Restlaufzeit T eine positive Anzahl von Aktien, die teilweise durch den (Leer-)Verkauf von Geldmarktzertifikaten (Kreditaufnahme) finanziert werden. Wir schreiben ϕ_t für die Anzahl der Aktien und η_t für die Anzahl der Geldmarktzertifikate, die auf Basis des Informationsstandes in $t-1$ gewählt werden und die im halboffenen Zeitintervall $[t-1, t]$ im Hedgeportefeuille enthalten sind. Dabei wird ϕ_t auch *Hedgeratio* genannt. Das Portefeuille wird im Zeitpunkt t mit der Festsetzung der neuen Aktienkurse umgeschichtet. Es besteht daher bereits in t aus ϕ_{t+1} Aktien und η_{t+1} Geldmarktzertifikaten, und der Portefeuillewert entspricht

$$F_t = \phi_{t+1}S_t + \eta_{t+1}B_t \quad \text{für } t = 0, \dots, T. \quad (1)$$

Während im *Binomialmodell* die Umschichtung des Hedgeportefeuilles *selbstfinanzierend* ist, d. h. der Kauf/Verkauf weiterer Aktien wird durch den Leerverkauf/Rückkauf von Geldmarktzertifikaten finanziert, kann im Trinomialmodell eine Umschichtung des Hedgeportefeuilles nicht zu jedem Zeitpunkt selbstfinanzierend sein. Vielmehr erfordert die Umstellung des Portefeuilles weitere finanzielle Mittel bzw. setzt Mittel frei. Die zusätzliche Netto-Investition, die positiv oder negativ sein kann, ergibt sich aus der Anzahl der zu kaufenden/verkaufenden Wertpapiere multipliziert mit deren Preis:

$$C_t - C_{t-1} = S_t(\phi_{t+1} - \phi_t) + B_t(\eta_{t+1} - \eta_t) = F_t - (\phi_t S_t + \eta_t B_t). \quad (2)$$

Für den Wert des Portefeuilles in t ergibt sich daraus

$$F_t = \phi_t S_t + \eta_t B_t + (C_t - C_{t-1}) \quad \text{für } t = 1, \dots, T. \quad (3)$$

Alternativ zu den Darstellungen (1) und (3) läßt sich der Wert des Portefeuilles in t auch als Summe von Anfangsinvestition, zusätzlicher Netto-Investition und dem Wertzuwachs des Portefeuilles, der bis zum Zeitpunkt t durch Preisänderungen der im Portefeuille enthaltenen Wertpapiere entsteht, darstellen:

$$F_t = F_0 + (C_t - C_0) + G_t \quad \text{mit} \quad G_t = \sum_{s=1}^t \{\phi_s (S_s - S_{s-1}) + \eta_s (B_s - B_{s-1})\}. \quad (4)$$

Der Prozeß G wird als Gewinnprozeß bezeichnet. Wir unterstellen, daß das Hedgeportefeuille am Verfalltag des Calls den Callwert dupliziert, d. h. daß $F_T = \max\{S_T - K, 0\} = (S_T - K)^+$ gilt.

2.1 Varianzminimierende Hedgingstrategie im Einperiodenmodell

Wie sichert sich nun der Stillhalter eines europäischen Calls mit Basispreis $K = 45$ und dem Verfalltag $T = 1$ gegen den Zahlungsanspruch des Käufes ab? Eine selbstfinanzierte Duplikationsstrategie für den Call existiert im Trinomialmodell i. a. nicht. In Anlehnung an das Binomialmodell wird der Stillhalter die Hedgingstrategie so wählen, daß der Call am Verfalltag *möglichst gut* dupliziert wird. Dabei ist es naheliegend, *möglichst gut* derart zu definieren, daß der erwartete Fehler der quadrierten zusätzlichen Hedgingkosten minimal wird. Das Optimierungsproblem lautet dann:

$$\min_{\phi_1, \eta_1} E((C_1 - C_0)^2) \quad \text{bzw.} \quad \min_{\phi_1, \eta_1} E((F_1 - \{\phi_1 S_1 + \eta_1 B_1\})^2). \quad (5)$$

Die Lösung der Optimierungsaufgabe (5) entspricht der Bestimmung einer Regressionsgeraden nach dem Prinzip der Kleinsten Quadrate mit der optimalen Hedgeratio ϕ_1 als Steigung der Regressionsgeraden und dem Kreditrückzahlungsbetrag als Ordinatenabschnitt:

$$\phi_1 = \frac{\text{Cov}(F_1, S_1)}{\text{Var}(S_1)} \quad \text{und} \quad \eta_1 B_1 = E(F_1) - \phi_1 E(S_1). \quad (6)$$

Der Portefeuillewert in $t = 0$ beträgt dann

$$F_0 = \phi_1 S_0 + \eta_1 B_0. \quad (7)$$

Abbildung 2 veranschaulicht diesen Zusammenhang für unser Zahlenbeispiel. Dabei kennzeichnen die Punkte u , d und s die möglichen Ausübungswerte des Calls in Abhängigkeit vom Aktienkurs. Ein Hedgefehler entsteht, weil die drei Punkte u , d und s nicht auf einer Geraden liegen. Im Binomialmodell, bei dem im nächsten Handelszeitpunkt nur zwei Callwerte möglich sind (z. B. u und d), existiert dagegen eine perfekte Hedgingstrategie. Die Hedgeratio entspricht dann der Steigung der Geraden durch diese beiden Punkte, also dem Quotienten aus der Differenz der möglichen Callwerte und der Differenz der möglichen Aktienkurse. Der Kreditrückzahlungsbetrag ergibt sich im Binomialmodell wieder aus dem Ordinatenabschnitt dieser Geraden.

Als optimale Hedgeratio erhält man $\phi_1 = 0,9171$. Die Anzahl der Geldmarktzertifikate beträgt $\eta_1 = -38,64$. Als optimaler Portefeuillewert in $t = 0$ ergibt sich $F_0 = 7,21$. Das führt zu zusätzlichen Hedgingkosten in $t = 1$ von $0,14$, $-0,28$ bzw. $3,89$ je nachdem, ob der Aktienkurs steigt, gleich bleibt oder fällt. Tritt dagegen das Kurssprungereignis s mit Wahrscheinlichkeit null auf, so erhält man als varianzminimierende Hedgingstrategie die Duplikationsstrategie des Binomialmodells mit der Hedgeratio $\phi_1 = (10 - 5)/(55 - 50) = 1$.

Die Lösung der linearen Regressionsaufgabe (5) impliziert, daß die erwarteten, zusätzlichen Hedgingkosten der optimalen Strategie null betragen. Die Minimierung der Varianz der zusätzlichen Hedgingkosten unter der Nebenbedingung, daß die erwarteten Hedgingkosten verschwinden, ist daher äquivalent zu (5):

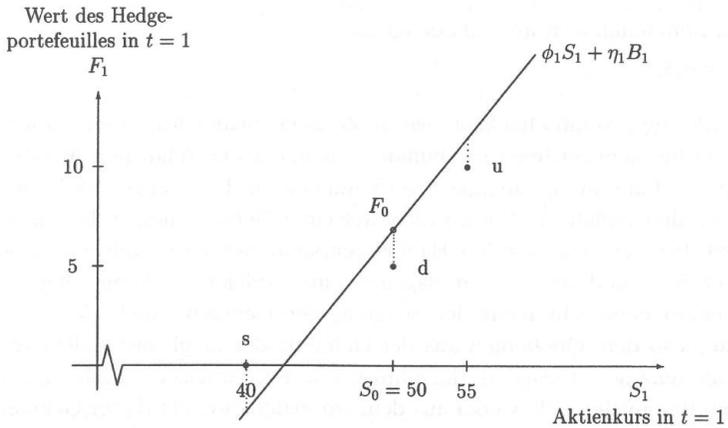
$$\min_{\phi_1, \eta_1} \text{Var}(C_1 - C_0) \quad \text{unter der NB:} \quad E(C_1 - C_0) = 0. \quad (8)$$

Wie läßt sich nun dieser varianzminimierende Ansatz zur Bestimmung der Hedgingstrategie auf den Mehrperiodenfall übertragen? Wir wollen im folgenden einen Call mit Basispreis $K = 45$ und einer Restlaufzeit von $T = 2$ betrachten. Um die Zeitpunktverschiedenheit der zusätzlich anfallenden Hedgingkosten nicht explizit berücksichtigen zu müssen, definieren wir den diskontierten Hedgefehler zum Zeitpunkt t durch

$$\Gamma_t \equiv C_0 + \sum_{s=1}^t (C_s - C_{s-1}) / B_s. \quad (9)$$

Föllmer/Sondermann (1986) schlagen nun vor, die Hedgingstrategie derart zu wählen, daß $\mathcal{R}_t = E((\Gamma_T - \Gamma_t)^2 | \mathcal{F}_t)$ für alle t minimiert wird. Dabei beschreibt \mathcal{R}_t den Erwartungswert der quadrierten, diskontierten Hedgingkosten,

Abbildung 2: Bestimmung der optimalen Strategie durch eine lineare Regression



die aufgrund der im Zeitpunkt t vorhandenen Information für die verbleibende Restlaufzeit der Option erwartet werden. Föllmer/Sondermann nennen \mathcal{R}_t das Risiko der Hedgingstrategie in t . Diese Strategie existiert, falls der diskontierte Preisprozeß einem Martingal folgt, d. h. die erwartete Rendite der Aktie entspricht der Rendite einer risikolosen Anlage, weil die Marktteilnehmer risikoneutral sind. Sind die Marktteilnehmer dagegen nicht risikoneutral, so existiert eine solche Strategie im allgemeinen nicht.

Zwei Lösungsansätze bieten sich an: Schweizer (1988) und Föllmer/Schweizer (1989) bestimmen auf rekursive Weise eine lokal optimale Hedgingstrategie: Vom Verfalltermin rückwärts gehend, wird in jeder Periode $[t-1, t]$ die Zusammensetzung des Portefolles so bestimmt, daß die erwarteten quadrierten zusätzlichen Hedgingkosten für diese Periode minimiert werden. Eine andere Möglichkeit besteht darin, nur \mathcal{R}_0 , also den Erwartungswert des quadrierten Hedgefehlers nur über die gesamte Restlaufzeit, zu minimieren. Beide Ansätze sollen in den nächsten beiden Abschnitten untersucht werden.

2.2 Lokal risikominimierende Strategie

Zur Bestimmung der lokal risikominimierenden Strategie (ϕ^t, η^t) werden, vom Verfalltermin rückwärts gehend, in jeder Periode die erwarteten quadrierten zusätzlichen Hedgingkosten für diese Periode minimiert. Da dieser Ansatz der sukzessiven Lösung von Einperiodenmodellen entspricht, können auch die nichtdiskontierten, zusätzlichen Hedgingkosten betrachtet werden. Am Verfalltag $t = T$ stimmt der Wert des Hedgeportefolles mit dem Ausübungswert des

Calls überein, d. h. $F_T^L = (S_T - K)^+$. Zum Handelszeitpunkt $t = 1$ besitzt der Call eine Restlaufzeit von einer Periode, und die Hedgingstrategie (ϕ_2^L, η_2^L) bzw. der Portefeuillewert F_1^L bestimmt sich gemäß Abschnitt 2.1. Allgemein gilt: Bei Kenntnis des optimalen Portefeuillewerts F_t^L ergeben sich ϕ_t^L und η_t^L als Lösung des folgenden Optimierungsproblems:⁶

$$\min_{\phi_t, \eta_t} E((C_t - C_{t-1})^2 | \mathcal{F}_{t-1}) \quad \text{bzw.} \quad \min_{\phi_t, \eta_t} E((F_t - (\phi_t S_t + \eta_t B_t))^2 | \mathcal{F}_{t-1}). \quad (10)$$

Diese Strategie ist *im Mittel selbstfinanzierend*, da der erwartete Zuwachs der Hedgingkosten der optimalen Lösung null beträgt. Deshalb kann man auch wieder das äquivalente Optimierungsproblem formulieren:

$$\min_{\phi_t, \eta_t} \text{Var}(C_t - C_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}) \quad \text{unter der NB:} \quad E(C_t - C_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}) = 0. \quad (11)$$

DEFINITION 2: Eine Hedgingstrategie heißt *lokal risikominimierend*, wenn sie obengenanntes Optimierungsproblem (10) löst. Der Begriff ergibt sich in Anlehnung an den von Föllmer und Sondermann definierten Risikobegriff. Wegen der Äquivalenz zu dem Optimierungsproblem (11) sprechen wir auch von einer *lokal varianzminimierenden* Hedgingstrategie.

Die Lösung der Aufgabe (10) entspricht wieder der Bestimmung einer Regressionsgeraden nach der Methode der Kleinsten Quadrate mit der optimalen Hedgeratio als Geradensteigung und dem Ordinatenabschnitt als Kreditrückzahlungsbetrag:

$$\phi_t^L = \frac{\text{Cov}(F_t^L, S_t | \mathcal{F}_{t-1})}{\text{Var}(S_t | \mathcal{F}_{t-1})} \quad \text{und} \quad \eta_t B_t = E(F_t^L | \mathcal{F}_{t-1}) - \phi_t^L E(S_t | \mathcal{F}_{t-1}). \quad (12)$$

Der Portefeuillewert in $t - 1$ ergibt sich aus

$$F_{t-1}^L = \phi_t S_{t-1} + \eta_t B_{t-1}. \quad (13)$$

Abbildung 3 zeigt die Verlaufspfade von optimalem Portefeuillewert, optimaler Hedgeratio sowie dem Zuwachs der Hedgingkosten für unser einführendes Beispiel. Mit der Vereinbarung $C_{-1} = 0$ beläuft sich die anfängliche Investition auf $F_0 = C_0 - C_{-1} = 9,26$.

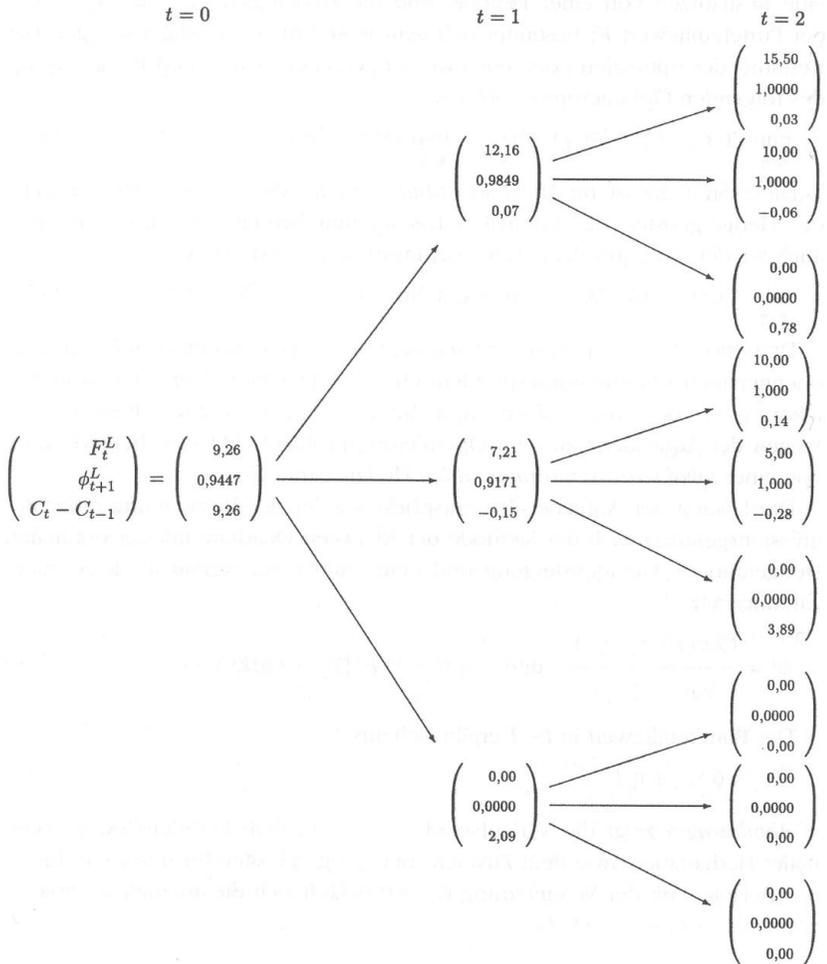
2.3 Global varianzminimierende Strategie

Bei der *global varianzminimierenden* Hedgingstrategie (ϕ^G, η^G) werden hingegen die erwarteten quadrierten zusätzlichen, diskontierten Hedgingkosten *über die gesamte Haltedauer* minimiert:⁷

⁶ $E(\cdot | \mathcal{F}_{t-1})$ bezeichnet die Erwartungswertbildung auf Basis des Informationsstandes im Zeitpunkt $t - 1$. Für $\text{Var}(\cdot | \mathcal{F}_{t-1})$ gilt Entsprechendes.

⁷ Zu beachten ist, daß die Hedgeratio ϕ_2 vom im Zeitpunkt $t = 1$ eingetretenen Aktien-

Abbildung 3: Lokal risikominimierende Strategie



$$\min_{\phi_1, \phi_2(\cdot), \eta_1} E((\Gamma_2 - \Gamma_0)^2 | \mathcal{F}_0). \quad (14)$$

kurs abhängt, d. h. eine Funktion vom Aktienkurs und der Zeit darstellt. Die Bondkomponente η_2 ist für die Optimierung nicht relevant. Das liegt darin begründet, daß eine Änderung von η_2 – beispielsweise eine höhere Kreditaufnahme – lediglich dazu führt, daß dieser zusätzliche Kreditbetrag mit Sicherheit in $t = 2$ zurückgezahlt werden muß. Er trägt deshalb nicht zur Varianz des Hedgefehlers bei.

Die optimale Lösung impliziert $E(\Gamma_T - \Gamma_0) = 0$. Daher ist die Problemstellung (14) äquivalent zur Minimierung der Varianz des gesamten zusätzlichen Hedgefehlers unter der Nebenbedingung, daß die erwarteten Hedgingkosten verschwinden:

$$\min_{\phi_1, \phi_2(\cdot), \eta_1} \text{Var}(\Gamma_2 - \Gamma_0 | \mathcal{F}_0) \quad \text{unter der NB: } E(\Gamma_2 - \Gamma_0 | \mathcal{F}_0) = 0. \quad (15)$$

DEFINITION 3: Eine Hedgingstrategie heißt *global varianzminimierend*, wenn sie das Optimierungsproblem (14) löst.

Abbildung 4: Global varianzminimierende Strategie

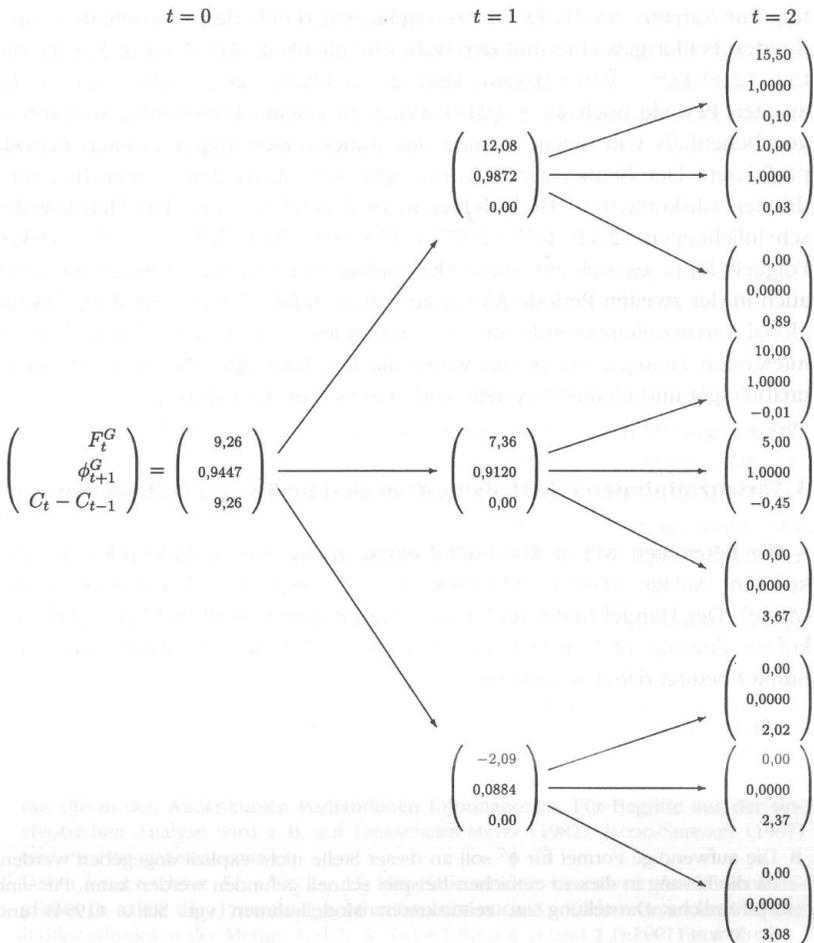


Abbildung 4 zeigt den optimalen Portfeuillewert, die optimale Hedgeratio sowie den Zuwachs der Hedgingkosten der global varianzminimierenden Hedgingstrategie für obiges Zahlenbeispiel. Die lokal varianzminimierende Hedgingstrategie stimmt im allgemeinen nicht mit der global varianzminimierenden überein. Betrachten wir z. B. für $t = 1$ den untersten Knoten im Ereignisbaum (das entspricht dem Ereignis $S_1 = 40$). In diesem Fall kann die Option nicht mehr im Geld enden. Wie aus *Abbildung 3* hervorgeht, besteht die lokal varianzminimierende Hedgingstrategie darin, das Hedgeportfeuille zu liquidieren. Für die global varianzminimierende Strategie gilt aber folgendes: Ist der Aktienkurs auf $S_1 = 40$ gefallen, so hat das Portfeuille einen Wert von $F_1 = -2,09$. Entscheidet sich der Stillhalter des Calls nun dazu, keine Aktien mehr in seinem Portfeuille zu halten, so realisiert er diesen Verlust. Der Beitrag zur Varianz des Hedgefehlers ergibt sich durch den diskontierten, quadrierten Fehler gewichtet mit der Wahrscheinlichkeit, daß der Fall $S_1 = 40$ eintritt: $(2,09/1,05)^2 \cdot 0,01 = 0,0396$. Hält der Stillhalter aber stattdessen in der zweiten Periode noch $\phi_2^G = 0,0884$ Aktien in seinem Portfeuille, so kann er gegebenenfalls von einem Anstieg des Aktienkurses in der zweiten Periode profitieren. Der Beitrag zur Varianz ergibt sich durch den zusätzlichen quadrierten (diskontierten) Hedgefehler in $t = 2$ gewichtet mit den Eintrittswahrscheinlichkeiten: $(2,02^2 \cdot 0,57 + 2,37^2 \cdot 0,42 + 3,08^2 \cdot 0,01)/1,1025^2 \cdot 0,01 = 0,0393$. Folglich lohnt es sich im Sinne der global varianzminimierenden Strategie, auch in der zweiten Periode Aktien zu halten. *Schäl* (1994) zeigt aber, daß die global varianzminimierende Strategie zumindest in $t = 0$ der lokal risikominimierenden Strategie entspricht, wenn die Renditen des Aktienpreisprozesses unabhängig und identisch verteilt sind, wie es hier der Fall ist⁸.

3 Varianzminimierende Hedgingstrategien im Sprung-Diffusionsmodell

Wir betrachten wie in Abschnitt 2 einen friktionslosen Markt mit einer risikolosen Anlage (Geldmarktzertifikat) und einer risikobehafteten Anlage (Aktie). Der Handel findet nun aber stetig im Zeitintervall $[0, T]$ statt. Die risikolose Zinsrate ist konstant, der Wert eines Geldmarktzertifikats zum Zeitpunkt t beträgt daher $B_t = \exp(rt)$.

8 Die aufwendige Formel für ϕ^G soll an dieser Stelle nicht explizit angegeben werden, da die Lösung in diesem einfachen Beispiel schnell gefunden werden kann. Für eine ausführliche Darstellung im zeitdiskreten Modellrahmen vgl. *SCHÄL* (1994) und *SCHWEIZER* (1995a).

3.1 Der Preisprozeß

Der Preisprozeß der Aktie (S_t) wird mit Hilfe eines Sprung-Diffusionsprozesses mit normalverteilten Sprunghöhen in den Log-Renditen modelliert. Die Ankunft von ‚normalen‘ Informationen führt zu einem Aktienkurs, der mittels einer geometrisch Brownschen Bewegung mit Diffusionsvarianz σ_D^2 modelliert werden kann. Die Brownsche Bewegung bezeichnen wir mit W . Gelegentlich auftretende ‚anomale‘ Informationen führen jedoch zu einem Sprung im Aktienkurs. Ein homogener Poissonprozeß N_t mit Sprungankunftsrate λ beschreibt die Sprungankunftszeiten: die Stoppzeit $T_i = \inf\{t | N_t = i\}$ modelliert den Zeitpunkt des i -ten Sprungs, N_t gibt die Anzahl der Sprünge im Zeitintervall $[0, t]$ an. Die prozentualen Sprunghöhen sind durch eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen $(L_i)_i$ gegeben. Die Sprunghöhe in der Log-Rendite $\ln(S_{T_i}/S_{T_i^-}) = \ln(1 + L_i)$ ist dabei normalverteilt mit Mittelwert $\alpha_j - \frac{1}{2} \sigma_j^2$ und Varianz σ_j^2 .⁹ Die erwartete prozentuale Sprunghöhe wird mit $k = E(L_i)$ und die Driftrate des Gesamtprozesses mit α bezeichnet. Der Aktienkurs in t läßt sich folgendermaßen schreiben:¹⁰

$$S_t = S_0 \exp\left\{ \left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma_D^2 - \lambda k \right) t + \sigma_D W_t + \sum_{i=1}^{N_t} \ln(1 + L_i) \right\}. \quad (16)$$

Gelegentlich benötigen wir auch die differentielle Darstellung des Renditeprozesses R :¹¹

$$dR_t \equiv \frac{dS_t}{S_{t-}} = \alpha dt + \sigma_D dW_t + (I_t dN_t - \lambda k dt). \quad (17)$$

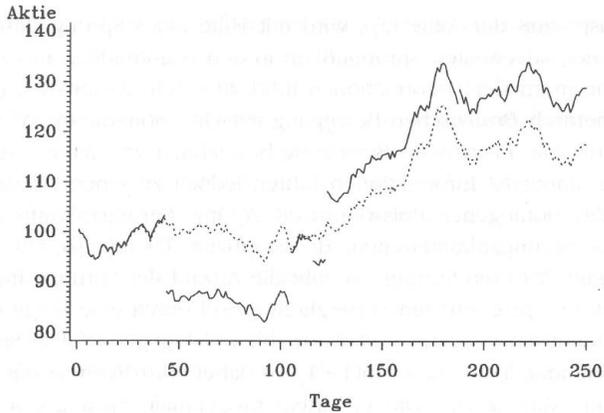
Dabei definiert $I_t = \sum_i L_i \mathbf{1}_{[T_{i-1}, T_i]}$ den Prozeß der prozentualen Sprünge. *Abbildung 5* zeigt einen simulierten Pfad eines Sprung-Diffusionsprozesses. Die gestrichelte Linie zeigt einen Pfad einer geometrisch Brownschen Bewegung mit Drift $\alpha = 0,15$ und Diffusionsvarianz $\sigma_D^2 = 0,018$. Für die Sprungankunftsrate $\lambda = 3$, die erwartete prozentuale Sprunghöhe $k = 0,10$ und für eine Varianz der

9 Setzt man die Anzahl der Sprünge als bekannt voraus, dann ist der Aktienkurs wieder lognormalverteilt.

10 Vergleiche dazu auch die Darstellung in BEINERT/TRAUTMANN (1991), TRAUTMANN/BEINERT (1995) und BEINERT (1997). Der Preisprozeß der Aktie ist auf einer stochastischen Basis $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, P)$ definiert, die den üblichen Bedingungen genügt. (Vgl. für diese technisch notwendige Bedingung JACOD/SHIRYAEV (1987, S. 2) oder PROTTER (1990, S. 3). Die Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_t$ wird dabei von S erzeugt. Der Markt enthält daher nur die in den Aktienkursen vorhandenen Informationen. Für Begriffe aus der stochastischen Analyse wird z. B. auf DELLACHERIE/MEYER (1982), JACOD/SHIRYAEV (1987) und PROTTER (1990) verwiesen.

11 Dabei kennzeichnet $S_{t-} = \lim_{s \uparrow t, s \neq t} S_s$ den linksseitigen Grenzwert des Aktienkurspfades in t . Für den Prozeß $(S_{t-})_t$ schreiben wir auch S_- . Zudem bezeichnet $\mathbf{1}_A$ die Indikatorfunktion der Menge A , d. h. $\mathbf{1}_A(x) = 1$ für $x \in A$ und $\mathbf{1}_A(x) = 0$ für $x \notin A$.

Abbildung 5: Pfadsimulation für einen Sprung-Diffusionsprozeß



Sprünge in den Log-Renditen von $\sigma_J^2 = 0,0115$ beschreibt die andere Linie einen simulierten Pfad dieses Sprung-Diffusionsprozesses.

Der Preisprozeß S stellt ein spezielles Semimartingal¹² dar und läßt sich folgendermaßen zerlegen (kanonische Semimartingalzerlegung):

$$S = S_0 + \underbrace{\int S_- \alpha dt}_{A} + \underbrace{\int S_- \sigma_D dW}_{M^c} + \underbrace{\int S_- (IdN - \lambda k dt)}_{M^d}. \quad (18)$$

M

Dabei ist die Driftkomponente des Aktienpreisprozesses A ein monoton steigender, stetiger, quadratintegrierbarer Prozeß (und damit vorhersehbar mit endlicher Variation). Der Prozeß $M = M^c + M^d$ ist ein quadratintegrierbares Martingal, das in einen stetigen Anteil, die *Diffusionskomponente* M^c , und in einen rein unstetigen Anteil, die *Sprungkomponente* M^d , aufgespalten werden kann. Wir bezeichnen mit¹³

12 Ein spezielles Semimartingal setzt sich zusammen aus einem (lokalen) Martingal M und einem vorhersehbaren Prozeß mit endlicher Variation A . Man kann A dabei als Driftkomponente des Prozesses interpretieren, während die Martingalkomponente die Schwankung des Prozesses um die Drift widerspiegelt; ein Martingal ist nämlich ein Prozeß, dessen erwartete Zuwächse in jedem Intervall null betragen, wenn sie aufgrund der am Intervallanfang vorhandenen Information berechnet werden. Intuitiv versteht man unter *Vorhersehbarkeit* von A , daß die Werte von A , schon einen Augenblick vor t bekannt sind. Ist A beispielsweise linksstetig, so kennt man A_t , wenn man A_s für alle $s < t$ kennt, da $A_t = \lim_{s \uparrow t, s \neq t} A_s$, vgl. JACOD/SHIRYAEV (1987, S. 16).

13 Die vorhersehbare Kovariation (Spitzklammerprozeß, Meyerprozeß) zweier Semimartingale X und Y ist z. B. bei PROTTER (1990, S. 98) definiert. Für die hier betrachte-

$$\frac{d\langle R, R \rangle}{dt} = \frac{d\langle M, M \rangle}{S^2 dt} = \sigma_{tot}^2 \quad (19)$$

die Momentanvarianz der Rendite. Sie setzt sich zusammen aus der Momentanvarianz der Diffusionskomponente $d\langle M^c, M^c \rangle / S^2 dt = \sigma_D^2$ und der Momentanvarianz der Sprungkomponente $d\langle M^d, M^d \rangle / S^2 dt = \sigma_{jump}^2 = \lambda E(L_i^2) = \lambda((k+1)^2 e^{\sigma_j^2} - 2k - 1)$. Der prozentuale Anteil der Sprungvarianz an der Gesamtvarianz $\sigma_{jump}^2 / \sigma_{tot}^2$ wird mit γ bezeichnet.

Dieses Marktmodell ist hochgradig unvollständig. *Bardhan/Chao* (1996) machen anschaulich deutlich, daß es sich auch nicht durch eine endliche Anzahl von Wertpapieren vervollständigen läßt. Unser Ziel ist es nun, varianzminimale Absicherungsstrategien für einen europäischen Call mit Basispreis K und Restlaufzeit T zu finden. Enthält das Hedgeportefeuille für diesen Call gekaufte Aktienanteile und (leer) verkaufte Geldmarktzertifikate, so setzt sich der Wert des Portefeuilles in t analog zur Beziehung (4) in Abschnitt 2 aus der Anfangsinvestition $F_0 = C_0$, den zusätzlichen Hedgingkosten bis t und dem Gewinn bis t zusammen:

$$F_t = F_0 + (C_t - C_0) + G_t \quad \text{mit} \quad G_t = \int_0^t \phi_s dS_s + \int_0^t \eta_s dB_s. \quad (20)$$

Die Hedgingstrategie (ϕ, η) muß dabei ein vorhersehbarer Prozeß sein¹⁴. Die diskontierten Hedgingkosten im Zeitpunkt t sind wie folgt definiert: $\Gamma_t = C_0 + \int_0^t B_s^{-1} dC_s$. Dies ergibt sich analog zu Gleichung (9), indem man beim Übergang zum zeitstetigen Modell die Summe durch ein Integral ersetzt.

ten Prozesse mit stetiger Driftkomponente kann der Zuwachs des Kovariationsprozesses als lokale Kovarianzrate verstanden werden: $d\langle X, Y \rangle / dt = \frac{d}{d(s-t)}$ $\text{Cov}(X_s, Y_s | \mathcal{F}_{t-}) |_{s=t}$ vgl. auch *DUFFIE* (1992, S. 88). Man schreibt auch $d\langle X, Y \rangle / dt = \text{Cov}(dX_s, dY_s | \mathcal{F}_{t-})$. Für eine Brownsche Bewegung W ist $d\langle W, W \rangle = dt$, für den Poissonprozeß gilt: $d\langle N, N \rangle = \lambda dt$. Die Kovariation dieser beiden Prozesse beträgt null: $\langle W, N \rangle = 0$.

14 ϕ_t und η_t müssen demnach schon „einen Augenblick vor t “ bekannt sein. Anschaulich bedeutet das insbesondere, daß die Anzahl der Aktien, die bei einem Sprung des Aktienpreises im Portefeuille enthalten sind, nicht erst gewählt werden können, wenn bekannt ist, ob und wie hoch der Sprung ausfällt. Im zeitdiskreten Modell des letzten Abschnitts haben wir dem dadurch Rechnung getragen, daß die Hedgingstrategie (ϕ_t, η_t) schon in $t-1$ bekannt sein mußte.

Besitzt ϕ für alle t einen rechtsseitigen Grenzwert, wie es bei den hier betrachteten Hedgingstrategien immer der Fall sein wird, so ergibt sich F_t vor einer Umschichtung respektive nach einer Umschichtung in t durch

$$F_t = \phi_t S_t + \eta_t B_t + \Delta C_t = \phi_{t+} S_t + \eta_{t+} B_t,$$

wobei mit $X_{t+} = \lim_{s \searrow t, s \neq t} X_s$ der rechtsseitige Limes, mit $X_{t-} = \lim_{s \nearrow t, s \neq t} X_s$ der linksseitige Limes und mit $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$ der Sprung eines Prozesses X in t bezeichnet wird. Das entspricht den Beziehungen (1) und (3) des letzten Abschnitts.

3.2 Lokal risikominimierende Strategie

Im zeitstetigen Modell gestaltet sich das Konzept der *lokalen* Risikominimierung nicht mehr so einfach wie in dem zeitdiskreten Modell des Abschnitts 2. Schweizer (1988, 1991) definiert die lokal risikominimierende Strategie deshalb mit Hilfe eines Variationsarguments¹⁵.

Unter gewissen Regularitätsbedingungen, die hier alle erfüllt sind¹⁶, läßt sich die lokal risikominimierende Strategie auch dadurch charakterisieren, daß der zugehörige (diskontierte) Hedgingkostenprozeß ein Martingal darstellt, das zu M , dem Martingalanteil des Preisprozesses, strikt orthogonal¹⁷ ist. Aus der Martingaleigenschaft folgt insbesondere, daß diese Strategie im Mittel selbstfinanzierend ist.

Wie in Abschnitt 2 minimiert die lokal risikominimierende Strategie die lokale Varianz des Hedgefehlers unter der Nebenbedingung, daß der erwartete lokale Hedgefehler verschwindet:¹⁸

$$\min_{\phi, \eta} d\langle C, C \rangle_t \quad \text{bzw.} \quad \min_{\phi, \eta} \text{Var}(dC_t | \mathcal{F}_{t-}) \quad \text{unter der NB:} \quad E(dC_t | \mathcal{F}_{t-}) = 0. \quad (21)$$

DEFINITION 4: Wir nennen eine Strategie *lokal varianzminimierend* (unter den Regularitätsbedingungen auch *lokal risikominimierend* (LRM)), wenn der Hedgingkostenprozeß ein Martingal darstellt, welches orthogonal zum Martingalanteil des Preisprozesses ist.

Föllmer/Schweizer (1991) und Schweizer (1992) bezeichnen nun ein Wahrscheinlichkeitsmaß P^m , das die Darstellung des lokal risikominimierenden

15 Dahinter verbirgt sich folgende Idee: Man betrachtet Variationen einer Strategie (ϕ, η) , die den gleichen Portefeuillewert in T liefern wie die ursprüngliche Strategie. Dann setzt man das auf einem Intervall durch die Variationen entstandene *zusätzliche Risiko* (vgl. für den Risikobegriff S. 8) ins Verhältnis zur Varianz des Preisprozesses auf diesem Intervall. Dadurch läßt man bei großen Preisschwankungen auch größere Abweichungen im Risiko zu. Der *Risikoquotient* beschreibt für eine Partition des Intervalls $[0, T]$ die Summe dieser Zuwächse im Risiko. Eine Strategie (ϕ^t, η^t) heißt nun *lokal risikominimierend* (LRM), wenn der Risikoquotient für jede Variation und für jede Folge von Partitionen, die beliebig fein werden, im Limes positiv ist. Eine Strategie ist demnach lokal risikominimierend, wenn durch lokale Variation dieser Strategie das Risiko zunimmt. Die Übertragung dieses Ansatzes auf das Mehrperiodenmodell führte dazu, daß der Zuwachs der Hedgingkosten auf jedem Intervall $[t-1, t]$ minimiert wurde.

16 Vgl. Anhang A.

17 Zwei quadratintegrierbare Martingale X und Y heißen strikt orthogonal, wenn das Produkt XY selbst ein Martingal ist. Das ist äquivalent dazu, daß der Zuwachs der vorhersehbaren Kovariation $d\langle X, Y \rangle$ null ist. Die Prozesse sind gewissermaßen 'lokal unkorreliert'.

18 Da der Hedgefehler nur in einem Zeitpunkt betrachtet wird, ist die Minimierung des diskontierten Hedgefehlers äquivalent.

Hedgeportefeuilles F^L als diskontierten Erwartungswert des Callwerts am Verfalltag T gestattet,

$$F_t^L = E^m((S_T - K)^+ \cdot B_t / B_T | \mathcal{F}_t) = E \left((S_T - K)^+ \cdot \frac{B_t}{B_T} \frac{\zeta^m}{E(\zeta^m | \mathcal{F}_t)} \middle| \mathcal{F}_t \right) \quad (22)$$

als *minimales* Martingalmaß. Die Radon-Nikodym-Ableitung dieses Maßes $\zeta^m = dP^m/dP$ wird *minimale* Martingaldichte genannt. Im ökonomischen Sinne entspricht dieses Konstrukt bis auf den Diskontierungsfaktor einer verallgemeinerten Dichte von Arrow-Debreu-Preisen. In Anhang B wird gezeigt, daß sie für das Sprung-Diffusionsmodell (16) folgendermaßen lautet:

$$\zeta_t^m = \exp \left(\frac{-(\alpha - r)\sigma_D}{\sigma_{tot}^2} W_t - \frac{1}{2} \frac{(\alpha - r)^2 \sigma_D^2}{\sigma_{tot}^4} t + \frac{(\alpha - r)\lambda k}{\sigma_{tot}^2} t \right) \cdot \prod_{i=1}^{N_t} \left(1 - \frac{(\alpha - r)L_i}{\sigma_{tot}^2} \right). \quad (23)$$

Aus dieser Gleichung ist leicht zu erkennen, daß die *minimale Martingaldichte* ζ^m nur dann strikt positiv ist, d. h. das minimale Martingalmaß nur dann ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß ist, falls mit Wahrscheinlichkeit eins $(\alpha - r)L_i/\sigma_{tot}^2 < 1$ für alle $i = 1, \dots, N_t$ gilt. Da die Sprünge in den Log-Renditen $\ln(1 + L_i)$ aber normalverteilt sind, ist der Träger von L_i das offene Intervall $] -1, \infty]$, und es gilt das folgende

RESULTAT 1: *Die minimale Martingaldichte im Sprung-Diffusionsmodell ist nur dann strikt positiv, wenn der Marktpreis des Risikos zwischen minus eins und null liegt:*

$$-1 \leq (\alpha - r) / \sigma_{tot}^2 \leq 0. \quad (24)$$

Im Normalfall einer positiven Überrendite nimmt ζ^m auch negative Werte an. Dies kann dazu führen, daß sehr tief aus-dem-Geld-notierenden Calloptionen ein negativer Preis zugeordnet wird¹⁹.

Dybvig/Ingersoll (1982) beobachten ein ähnliches Phänomen. Sie zeigen, daß die Bewertung von Finanztiteln nach dem CAPM (E-V-Bewertung) in voll-

19 Einer Option, die genau 1 Geldeinheit zahlt, wenn ζ^m negativ ist, würde man einen negativen Wert zuordnen. Für einen europäischen Call kann man jedoch zeigen, daß keine risikolose Arbitrage-Möglichkeiten entstehen, solange der Callwert größer als der BLACK/SCHOLES-Wert auf der Basis der Diffusionsvarianz und kleiner als der Aktienpreis selbst ist. Vgl. auch Resultat 5. Das deckt sich mit einem Ergebnis von EBERLEIN/JACOD (1995). Sie zeigen, daß in arbitragefreien Märkten unter der Annahme eines reinen Sprungprozesses der Callwert jeden beliebigen Wert zwischen der europäischen Wertuntergrenze $\max[S - K/B_T; 0]$ und dem Aktienpreis S annehmen kann. Für repräsentative Parameter liegt F^L nun zwischen $F^{BS}(\sigma_D^2)$ und S .

ständigen Märkten Arbitrage impliziert, wenn die Marktrendite genügend groß werden kann. Der Bewertung von Finanztiteln mit dem minimalen Martingalmaß liegt gewissermaßen eine lokale E-V-Bewertung zugrunde. Finanztitelbewertung gemäß Beziehung (22) ist nicht mehr arbitragefrei, wenn die lokalen Renditen (d. h. die Sprünge im Preisprozeß) zu groß werden.

Auch wenn die Bewertung einer Option mit dem minimalen Martingalmaß problematisch ist, ist es sinnvoll, zu Absicherungszwecken die lokal risikominimierende Strategie zu untersuchen. Die Berechnung des Portfeuillewerts in Anhang C führt zu folgendem Resultat:

RESULTAT 2: *Unter der Annahme des Sprung-Diffusionsmodells aus Gleichung (16) besitzt der Portfeuillewert der lokal risikominimierenden Strategie in t für einen europäischen Call die folgende Darstellung:*

$$F_t^L = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n a_{n,l} F^{BS}(S_t, K, r_{n,l}, \sigma_n, \tau) \quad (25)$$

mit

$$F^{BS} \equiv \text{Black / Scholes Wert}$$

$$\tau \equiv T - t = \text{Restlaufzeit}$$

$$r_{n,l} \equiv r - \hat{\lambda} \hat{k} + \frac{n\alpha_J + (n-l)\sigma_J^2}{\tau}$$

$$\hat{\lambda} \equiv \lambda \left(1 - \frac{(\alpha - r)k}{\sigma_{tot}^2} \right)$$

$$\hat{k} \equiv \frac{1}{\hat{\lambda}} \left(\lambda k - \frac{(\alpha - r)\lambda E(L_i^2)}{\sigma_{tot}^2} \right)$$

$$\sigma_n^2 \equiv \frac{n\sigma_J^2}{\tau} + \sigma_D^2$$

$$a_{n,l} \equiv \exp(-\hat{\lambda}(\hat{k}+1)\tau) \frac{(\hat{\lambda}(\hat{k}+1)\tau)^n}{n!} \binom{n}{l} \left(\frac{a}{\hat{\lambda}(\hat{k}+1)} \right)^l \left(\frac{b}{\hat{\lambda}(\hat{k}+1)} \right)^{n-l}$$

$$a \equiv \left(\lambda + \frac{\lambda(\alpha - r)}{\sigma_{tot}^2} \right) \cdot (k+1)$$

$$b \equiv \frac{-\lambda(\alpha - r)}{\sigma_{tot}^2} (E(L_i^2) + 2k + 1).$$

Der Portfeuillewert entspricht einer gewichteten Summe von Black/Scholes-Werten. Die Gewichte addieren sich zu eins; sie sind allerdings nur dann alle positiv, wenn der Marktpreis des Risikos zwischen minus eins und null liegt.

Die Orthogonalität von Hedgerfehler und Martingalkomponente M führt nun, wie Anhang D zeigt, zu folgender Hedgeratio:

RESULTAT 3: Die lokal risikominimierende Hedgeratio entspricht

$$\begin{aligned}
 \phi^L &= \frac{d\langle F^L, S \rangle}{d\langle S, S \rangle} \quad (26) \\
 &= (1 - \gamma) F_s^L(S_-) + \gamma \frac{E_L(\Delta S \Delta F^L)}{E_L((\Delta S)^2)} \\
 &= (1 - \gamma) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n a_{n,l} N(d_1(S_-, n, l)) \\
 &\quad + \gamma \frac{\lambda}{\sigma_{jump}^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n a_{n,l} \left\{ -k \frac{F^{BS}(S_-, K, r_{n,l}, \sigma_n, \tau)}{S_-} \right. \\
 &\quad \left. + (k+1)^2 e^{\sigma_j^2} \frac{F^{BS}(S_-, K, r_{n+1,l}, \sigma_{n+1}, \tau)}{S_-} \right. \\
 &\quad \left. - (k+1) \frac{F^{BS}(S_-, K, r_{n+1,l+1}, \sigma_{n+1}, \tau)}{S_-} \right\}
 \end{aligned}$$

wobei F_s^L die partielle Ableitung von F^L nach dem Aktienkurs und E_L die Erwartungsbildung über die Sprungkomponente kennzeichnet. Zusätzlich zur Notation aus Resultat 2 gilt folgende Vereinbarung:

$N(x) \equiv$ Verteilungsfunktion der Standard - Normalverteilung

$d_1(S_-, n, l) \equiv (\ln(S_- / K) + (r_{n,l} + 0.5\sigma_n^2)\tau) / (\sigma_n \sqrt{\tau})$.

Die Hedgeratio ergibt sich, wie auch schon im Zweiperiodenmodell, aus dem Verhältnis von lokaler Kovarianz des Portefeuillewerts und des Aktienpreises und der lokalen Varianz des Aktienpreises, entspricht also einem lokalen Beta-Koeffizienten. Diesen kann man in zwei Komponenten aufspalten: in einen Beta-Koeffizienten bezüglich der Diffusion, der sich aus der Ableitung des Portefeuillewerts bezüglich des Aktienkurses ergibt und mit dem Anteil der Diffusionsvarianz an der Gesamtvarianz, $1 - \gamma$, gewichtet wird. Die zweite Komponente ist durch den Beta-Koeffizienten bezüglich der Sprungkomponente gegeben, der mit dem Anteil der Sprungvarianz an der Gesamtvarianz, γ , gewichtet wird. Diese Strategie unterscheidet nicht zwischen Diffusions- und Sprungrisiko. Sie sichert beide Risikoarten partiell ab.

Im Spezialfall eines vollständigen Markts stimmt die Strategie mit einer selbstfinanzierenden Duplikationsstrategie überein. Gibt es beispielsweise keine Kurssprünge ($\lambda = 0$), so ergibt sich der *Black/Scholes*-Portefeuillewert und die *Black/Scholes*-Hedgeratio. Verschwindet dagegen der Diffusionsterm und ist die Höhe der Sprünge konstant ($\sigma_D = \sigma_J = 0$), so spezialisieren sich Portefeuillewert und Hedgeratio zu denen aus dem reinen Sprung-Modell mit

konstanter Sprunghöhe von Cox/Ross (1975). Entspricht die Driftrate des Preisprozesses der risikolosen Zinsrate ($\alpha - r = 0$), ist zwar der Portefeuillewert mit Mertons Wert (1976) identisch, da bei einer Überrendite von null in beiden Modellen das Sprungrisiko nicht bewertet wird. Die Hedgeratios unterscheiden sich aber (vgl. auch Abschnitt 4.3), da im Modell von Merton (1976) das Sprungrisiko gar nicht, das Diffusionsrisiko aber vollständig abgesichert wird. Bei der lokalen Risikominimierung werden dagegen beide Risikoarten gleichwertig behandelt.

Der Hedgefehler läßt sich wegen $\eta^L = (F^L - \phi^L S_-)/B$ aus $dC^L = dF^L - \phi^L dS - \eta^L dB$ berechnen²⁰. Man erhält:

$$dC^L = (\Delta F^L - \phi^L \Delta S) + (F_s^L - \phi^L) \sigma_D S dW + (\phi^L \lambda k S - \lambda E_L(\Delta F^L)) dt. \quad (27)$$

Der erste Summand steht für den Hedgefehler, der aus einem Sprung des Aktienpreises resultiert. Der zweite Summand gibt die Diffusionskomponente des Hedgefehlers wieder. Es wird deutlich, daß er dadurch entsteht, daß die Hedgeratio *nicht mehr* – wie in den meisten pfadstetigen Modellen – der Ableitung des Portefeuillewerts bezüglich des Aktienkurses F_s^L entspricht. Der Hedgefehler, der sich bei einer nichtstochastischen Änderung des Aktienkurses im Zeitablauf ($dN = dW = 0$) allein durch das Verstreichen der Zeit ergibt, entspricht dem letzten Summanden. Die Driftrate des Hedgefehlers bzw. des diskontierten Hedgefehlers ist konstruktionsgemäß null. *Abbildung 6* visualisiert den durch einen Sprung hervorgerufenen Hedgefehler. Die durchgezogene Linie stellt den Portefeuillewert der lokal risikominimierenden Strategie F_t^L in Abhängigkeit vom Aktienkurs S_t für die Parameter $K = 100$, $\tau = 1/12$, $r = 0,1$, $\alpha = 0,2$, $\lambda = 3$, $\sigma_{tot} = 0,3$ und $\gamma = 0,8$ (nach einem Ausgleich des Hedgefehlers) dar. Die gestrichelte Linie spiegelt den Wert des in t^- angepassten Hedgeportefeuilles vor einer Anpassung und einem Fehlerausgleich in t wider. Die Steigung dieser Linie entspricht folglich ϕ_t^L . Bild A bezieht sich auf eine erwartete positive Sprunghöhe von $k = 0,105$ und einen Aktienkurs von $S_t^- = 100$, während Bild B für eine negative erwartete Sprunghöhe von $k = -0,095$ und einen Aktienkurs von $S_t^- = 110$ erstellt wurde. Der durch einen Sprung verursachte Hedgefehler ergibt sich durch die Differenz aus durchgezogener und gestrichelter Linie. Die *Abbildung* zeigt auf, daß Sprünge im Aktienkurs zu einem positiven oder einem negativen Hedgefehler führen können. Im Gegensatz zu pfadstetigen Modellen, wie z. B. dem Black/Scholes-Modell, entspricht ϕ^L nicht der Steigung des Portefeuillewerts, die gestrichelte Linie also nicht der Tangente an F^L . Daraus resultiert ein Hedgefehler, auch wenn die Aktie nicht

20 In diesem Zusammenhang sei noch die FÖLLMER/SCHWEIZER-Zerlegung erwähnt, die einer Aufspaltung des Portefeuillewerts in den durch das Hedgeportefeuille abgesicherten Anteil des Calls, $C_0 + \int \phi dS + \int \eta dB$, und in den Hedgefehler, $C_T - C_0$, entspricht, vgl. FÖLLMER/SCHWEIZER (1991), MONAT/STRICKER (1995).

Abbildung 6: LRM-Hedgefehler aufgrund von Sprüngen im Aktienkurs

Parameter: $r = 0,1$, $K = 100$, $\tau = 1/12$, $\alpha = 0,2$, $\lambda = 3$, $\sigma_{tot} = 0,3$ und $\gamma = 0,8$.

Bild A: Positive erwartete Sprunghöhe von $k = 0,105$,
Aktienkurs vor einem Sprung von $S_{t-} = 100$

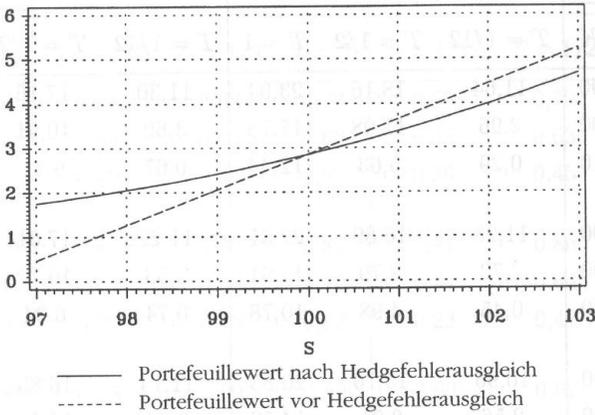
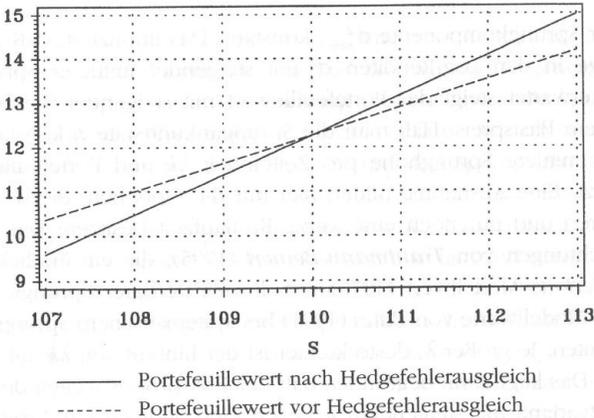


Bild B: Negative erwartete Sprunghöhe von $k = -0,095$,
Aktienkurs vor einem Sprung von $S_{t-} = 110$



springt, der Aktienkurs sich nur infinitesimal aufgrund der *Brownschen* Bewegung ändert.

Tabella 1 zeigt, wie der Portefeuillewert der lokal risikominimierenden Strategie vom Basispreis K , der Restlaufzeit T , der Sprungankunftsrate λ und der pro Zeiteinheit erwarteten Sprunghöhe λk abhängt. Dabei halten wir die gesamte Momentanvarianz σ_{tot}^2 sowie die Momentanvarianz der Diffusionskomponente

Tabelle 1: Werte des lokal risikominimierenden Hedgeportefeuilles

		$S = 100, \alpha = 0,15, r = 0,1, \sigma_{tot} = 0,3, \gamma = 0,8$					
		$\lambda = 1$			$\lambda = 10$		
λk	K	$T = 1/12$	$T = 1/2$	$T = 1$	$T = 1/12$	$T = 1/2$	$T = 1$
-0,1	90	11,64	18,16	23,94	11,30	17,16	22,66
	100	2,96	11,08	17,75	3,60	10,91	16,82
	110	0,29	5,63	12,44	0,67	6,41	12,14
0	90	11,28	16,89	22,31	11,22	17,01	22,47
	100	2,72	9,79	15,91	3,53	10,77	16,64
	110	0,45	4,98	10,78	0,74	6,34	11,99
0,1	90	10,96	15,76	20,85	11,14	16,85	22,29
	100	2,56	8,91	14,52	3,48	10,63	16,46
	110	0,63	4,85	9,89	0,81	6,28	11,84

σ_D^2 und der Sprungkomponente σ_{jump}^2 konstant. Das impliziert, daß die Varianz der Sprünge in den Log-Renditen σ_j^2 mit steigender mittlerer Sprunghöhe k sinkt. Wie erwartet steigt der Portefeuillewert mit steigender Restlaufzeit und mit fallendem Basispreis. Hält man die Sprungankunftsrate λ konstant, so verhalten sich mittlere Sprunghöhe pro Zeiteinheit λk und Portefeuillewert entgegengesetzt. Eine Ausnahme bilden hier nur die Optionen, die weit aus dem Geld notieren und nur noch eine kurze Restlaufzeit besitzen. Das deckt sich mit Beobachtungen von *Trautmann/Beinert* (1995), die ein ähnliches Phänomen für *Mertons* Modellwert (1976) mit diversifizierbarer Sprungkomponente und für die Modellwerte von *Bates* (1991) bei systematischem Sprungrisiko feststellen konnten. Je größer λ , desto kleiner ist der Einfluß von λk auf den Portefeuillewert. Das liegt darin begründet, daß der Preisprozeß wegen der Konstanz der Gesamtvarianz mit steigendem λ gegen eine geometrisch *Brownsche* Bewegung mit Momentanvarianz σ_{tot}^2 konvergiert. Der Portefeuillewert konvergiert dann gegen den *Black/Scholes*-Wert F^{BS} (σ_{tot}^2) unabhängig davon, ob die mittlere Sprunghöhe pro Zeiteinheit ein positives oder negatives Vorzeichen besitzt.

In *Tabelle 2* stehen die entsprechenden Werte für die Hedgeratio. Mit steigendem Basispreis fällt die Hedgeratio. Das Verhältnis von Hedgeratio und Restlaufzeit entspricht im wesentlichen dem des *Black/Scholes*-Modells (vgl. *Cox/Ross/Rubinstein* (1985, S. 233)). Interessant ist die Tatsache, daß die Hedge-

Tabelle 2: Lokal risikominimierende Hedgeratio

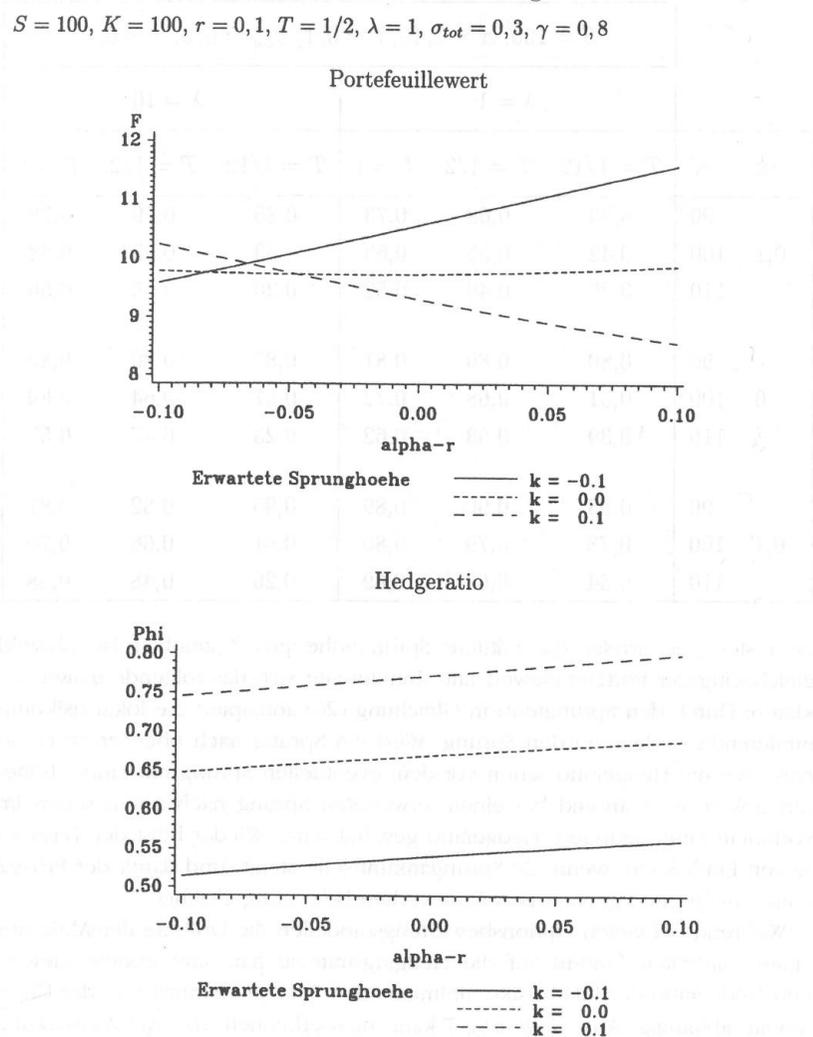
		$S = 100, \alpha = 0,15, r = 0,1, \sigma_{tot} = 0,3, \gamma = 0,8$					
		$\lambda = 1$			$\lambda = 10$		
λk	K	$T = 1/12$	$T = 1/2$	$T = 1$	$T = 1/12$	$T = 1/2$	$T = 1$
-0,1	90	0,63	0,68	0,73	0,85	0,79	0,79
	100	0,42	0,55	0,63	0,53	0,63	0,68
	110	0,20	0,40	0,52	0,20	0,45	0,56
0	90	0,80	0,80	0,81	0,87	0,80	0,80
	100	0,61	0,68	0,72	0,57	0,64	0,69
	110	0,39	0,53	0,62	0,23	0,47	0,57
0,1	90	0,93	0,90	0,89	0,90	0,82	0,81
	100	0,78	0,79	0,80	0,61	0,66	0,70
	110	0,54	0,63	0,69	0,26	0,48	0,58

ratio steigt, je größer die mittlere Sprunghöhe pro Zeiteinheit ist, obwohl gleichzeitig der Portefeuillewert fällt. Intuitiv läßt sich das folgendermaßen erklären: Durch den Sprungterm in Gleichung (26) antizipiert die lokal risikominimierende Hedgeratio den Sprung. Wird ein Sprung nach oben erwartet, so paßt sich die Hedgeratio schon vor dem eventuellen Sprung mit einem höheren ϕ -Wert an, während bei einem erwarteten Sprung nach unten schon im Vorhinein eine niedrigere Hedgeratio gewählt wird. Wieder büßt der Term λk seinen Einfluß ein, wenn die Sprungankunftsrate steigt (und damit der Prozeß immer mehr einer geometrisch Brownschen Bewegung gleicht).

Während bei vielen Optionsbewertungsmodellen die Driftrate der Aktie nur einen impliziten Einfluß auf die Hedgingstrategie hat, sind Portefeuillewert und Hedgeratio der lokal risikominimierenden Strategie explizit von der Überrendite abhängig. Aus Abbildung 7 kann man erkennen, daß die Auswirkung der Überrendite auf den Portefeuillewert von dem Vorzeichen der erwarteten Sprunghöhe abhängt. Ist der mittlere Sprung neutral, so wirkt sich die Überrendite kaum auf den Portefeuillewert aus; erwartet man Sprünge nach unten, so steigt der Portefeuillewert mit steigender Überrendite, während sich der Wert bei positiver erwarteter Sprunghöhe umgekehrt verhält. Die Hedgeratio steigt hingegen mit steigender Überrendite, unabhängig vom Vorzeichen der erwarteten Sprunghöhe.

Abbildung 7: Einfluß der Überrendite auf die lokal risikominimierende Strategie

$S = 100, K = 100, r = 0,1, T = 1/2, \lambda = 1, \sigma_{tot} = 0,3, \gamma = 0,8$



3.3 Global varianzminimierende Strategie

Das Zweiperiodenmodell hat schon gezeigt, daß statt der lokalen Minimierung des Hedgefehlers auch der gesamte Hedgefehler global minimiert werden kann. Soll das Hedgeportefeuille im Zeitpunkt $t = 0$ aufgebaut werden, so will

diese Strategie den erwarteten (diskontierten) quadrierten Hedgefehler über die gesamte Hedgeperiode $[0, T]$ minimieren. Wie auch schon im Mehrperiodenmodell heißt eine Hedgingstrategie *global varianzminimierend*, wenn sie eines der beiden folgenden äquivalenten Optimierungsprobleme löst:

$$\min_{\phi, \eta_0} E((\Gamma_T - \Gamma_0)^2) \quad (28)$$

bzw.

$$\min \text{Var}((\Gamma_T - \Gamma_0)) \text{ unter der NB: } E(\Gamma_T - \Gamma_0) = 0. \quad (29)$$

Das Optimierungsproblem läßt sich demnach ganz genau wie im zeitdiskreten Fall formulieren (vgl. Optimierungsproblem (14)). Der global varianzminimierende Portefeuillewert kann zu Beginn der Absicherungsperiode ($t = 0$) mit Hilfe des varianzoptimalen Martingalmaßes bestimmt werden²¹. Aus Schweizer (1994b) geht aber hervor, daß wie in Abschnitt 2 minimales und varianzoptimales Martingalmaß übereinstimmen, wenn die Rendite des Preisprozesses unabhängige, identisch verteilte Zuwächse besitzt; deshalb ist auch der *global* optimale Wert in $t = 0$ durch Gleichung (25) gegeben. Ebenso sind in $t = 0$ auch die beiden Hedgeratios identisch²². Zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$ wird die global varianzminimierende Strategie jedoch von der Aktienkursbewegung bis t abhängen. Schweizer (1994a) bestimmt die global optimale Hedgeratio aus der lokal optimalen Hedgeratio durch folgende rekursive Gleichung:

$$\phi_t^G = \phi_t^L + \frac{(\alpha - r)}{\sigma_{tot}^2 S_-} (F_{t-}^L - F_{t-}(\phi^G)). \quad (30)$$

Dabei bezeichnet $F_t(\phi^G) = F_0^G + \int_0^t \phi^G dS + \int_0^t \eta dB$ den Wert des Hedgeportefeuilles, das ϕ^G Aktien enthält und dessen Anzahl an Geldmarktzertifikaten η so gewählt wird, daß die Strategie für $0 < t < T$ selbstfinanzierend ist, also so daß vor T keine weiteren Mittel ins Portefeuille fließen. Zu beachten ist, daß $F_t(\phi^G) \neq E^m(e^{-rt}(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t)$ für $t > 0$ ²³.

Zum Abschluß dieses Abschnitts wollen wir uns überlegen, wie sich die Idee der lokal varianzminimierenden Hedgingstrategie bei Gültigkeit eines Gleichgewichtsmodells für den Optionswert nutzbringend modifizieren läßt.

21 Die Radon-Nikodym-Dichte ζ des varianzoptimalen Maßes ist Lösung von folgendem Optimierungsproblem: $\min \text{Var}(\zeta)$ über alle (evtl. signierten) Radon-Nikodym-Dichten von Martingalmaßen ζ , vgl. SCHWEIZER (1995b).

22 Demnach ist die Sensitivitätsanalyse für die lokal risikominimierende Strategie auch für die global varianzminimierende Strategie in $t = 0$ gültig.

23 Tatsächlich ist es jedoch unbedeutend, wie η_t für $t > 0$ gewählt wird, da dadurch entstehende Abweichungen im Hedgingkostenprozeß spätestens in T kompensiert werden.

3.4 Lokal varianzminimierende Strategie im Modell von Bates

In dem Gleichgewichtsmodell von *Bates* (1991) zur Bewertung von Optionen existiert ein repräsentativer Investor, dessen Risikonutzenfunktion zeitseparierbar ist und eine konstante relative Risikoaversion δ aufweist. Der Aktienpreisprozeß folgt einem Sprung-Diffusionsprozeß. Wir unterstellen zudem, daß das *gesamte* Sprungrisiko systematisch ist. Für einen europäischen Call ergibt sich folgender Wert:

$$F_t^{Ba}(S, K, \tau, \sigma_D, r, \lambda, \alpha_j, \sigma_j, \delta) = \sum_n a_n^* F^{BS}(S, K, r_n^*, \sigma_n^*, \tau) \quad (31)$$

mit

$$\lambda^* \equiv \lambda \exp(-\delta\alpha_j + 0,5\delta(1+\delta)\sigma_j^2)$$

$$\alpha_j^* \equiv \alpha_j - \delta\sigma_j^2$$

$$k^* \equiv \exp(\alpha_j^*) - 1$$

$$a_n^* \equiv \exp(-\lambda^*(k^*+1)\tau) \frac{(\lambda^*(k^*+1)\tau)^n}{n!}$$

$$\sigma_n^2 \equiv \sigma_D^2 + n\sigma_j^2 / \tau,$$

$$r_n^* \equiv r - \lambda^* k^* + n\alpha_j^* / \tau.$$

Wir suchen jetzt diejenige Hedgingstrategie, die die lokale Varianz des Hedgefehlers minimiert. Nun setzen wir aber nicht mehr voraus, daß der mittlere Hedgefehler verschwindet. Vielmehr soll der Wert des Hedgeportefeuilles zu jedem Zeitpunkt t dem Modellwert des Calls entsprechen: Die zusätzlichen Hedgingkosten zuzüglich des zusätzlichen Gewinns müssen folglich dem Zuwachs im *Bates*-Wert entsprechen. Ferner müssen Hedgeportefeuille und *Bates*-Wert in $t=0$ übereinstimmen:

$$\min_{\phi, \eta} d\langle C, C \rangle_t \quad \text{unter der NB: } dF_t = dC_t + \phi_t dS_t + \eta_t dB = dF_t^{Ba} \quad (32)$$

$$F_0 = C_0 = F_0^{Ba}.$$

Die Minimierung der lokalen Varianz führt wieder dazu, daß wie bei der lokal risikominimierenden Strategie die optimale Hedgeratio (Bates-(LVM)) einem lokalen Beta-Koeffizienten gleicht. Die Struktur der Hedgingstrategie stimmt deshalb formal mit der der lokal risikominimierenden Strategie überein. Der einzige Unterschied besteht darin, daß der lokal risikominimierende Portefeuillewert F^L durch den Modellwert F^{Ba} ersetzt wird.

RESULTAT 4: Die lokal varianzminimierende Hedgeratio im Modell von Bates entspricht

$$\begin{aligned}
 \phi_t^{BL} &= \frac{d\langle F^{Ba}, S \rangle}{d\langle S, S \rangle} & (33) \\
 &= (1-\gamma) F_s^{Ba}(S_-) + \gamma \frac{E_L(\Delta S \Delta F_s^{Ba})}{E_L((\Delta S)^2)} \\
 &= (1-\gamma) \sum_n a_n^* N(d_1(S_-, n)) \\
 &\quad + \gamma \frac{\lambda}{\sigma_{jump}^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* \left\{ -k \frac{F^{BS}(S_-, K, r_n^*, \sigma_n^*, \tau)}{S_-} \right. \\
 &\quad \left. + (k+1)^2 e^{\sigma_j^2} \frac{F^{BS}(S_-, K, r_{n+1}^{**}, \sigma_{n+1}, \tau)}{S_-} \right. \\
 &\quad \left. - (k+1) \frac{F^{BS}(S_-, K, r_{n+1}^{**}, \sigma_{n+1}, \tau)}{S_-} \right\}
 \end{aligned}$$

mit

$$r_n^* \equiv r_n^* + \delta \sigma_J^2 / \tau$$

$$r_n^{**} \equiv r_n^* + (\delta + 1) \sigma_J^2 / \tau$$

$$d_1(n) \equiv (\ln(S_- / K) + (r_n^* + 0.5 \sigma_n^2) \tau) / (\sigma_n \sqrt{\tau}).$$

Die Hedgeratio lässt sich wieder in eine Diffusionskomponente und eine Sprungkomponente aufspalten, die beide jeweils mit dem Anteil an der Gesamtvarianz gewichtet sind. Konstruktionsgemäß unterscheidet diese Strategie nicht zwischen Diffusions- und Sprungrisiko, sichert deshalb beide Risikoarten partiell ab. Da F^{Ba} als Callwert konvex in S ist, lässt sich analytisch beweisen, daß ϕ^{BL} streng monoton steigt und zwischen null und eins liegt.

4 Fehlspezifizierte Hedgingstrategien im Sprung-Diffusionsmodell

Die Güte von varianzminimierenden Hedgingstrategien beurteilen wir aufgrund eines in Abschnitt 5 durchgeführten Vergleichs mit Delta-Hedgingstrategien. Letztere Strategien werden von Stillhaltern gewählt, wenn sie die Sprungkomponente nicht wahrnehmen, bzw. diese (zumindest beim Hedgen) für vernachlässigbar oder diversifizierbar halten. Im folgenden formulieren wir die Hedgeratios dieser alternativen Delta-Hedgingstrategien.

4.1 Black/Scholes-Strategie auf Basis der Diffusionsvarianz

Wir unterstellen zunächst einen Stillhalter, der nicht wahrnimmt, daß der Preisprozeß der Aktie eine Sprungkomponente enthält. Er wird sich fälsch-

licherweise für eine *Black/Scholes*-Strategie entscheiden. Wenn der Stillhalter die Möglichkeit von Sprüngen gänzlich außer acht läßt, so wird der Wert seines Hedgeportefeuilles dem *Black/Scholes*-Wert auf der Basis der Diffusionsvarianz entsprechen, und die Hedgeratio ist durch die Ableitung des *Black/Scholes*-Wertes nach dem Aktienkurs in t^- gegeben.²⁴

$$\phi^{BS}(\sigma_D^2) = F_s^{BS}(S_-) = N(d_1(S_-, \sigma_D^2)) \quad (34)$$

$$\begin{aligned} F^{BS} &= F^{BS}(S, K, r, \sigma_D, \tau) \\ &= SN(d_1(\sigma_D^2)) - Ke^{-r\tau}N(d_2(\sigma_D^2)). \end{aligned} \quad (35)$$

mit

$$\begin{aligned} d_1(S) &= (\ln(S/K) + (r + 0.5\sigma_D^2)\tau) / (\sigma_D\sqrt{\tau}) \\ d_2 &= d_1 - \sigma_D\sqrt{\tau} \\ \tau &= T - t. \end{aligned}$$

Bei dieser Strategie ist der Hedgefehler genau dann von null verschieden, wenn der Preisprozeß springt. Dann ist der Hedgefehler aber immer positiv, da der *Black/Scholes*-Wert konvex in S ist:

$$dC = \Delta F^{BS} - F_s^{BS}(S_-)\Delta S \geq 0. \quad (36)$$

Wählt man diese Hedgingstrategie, so liegt der Hedgeportefeuillewert bei einer positiven Restlaufzeit immer *unter* dem tatsächlichen Wert des Calls. Tritt ein Sprung im Aktienkurs auf, dann (und nur dann) erfordert diese Strategie eine zusätzliche Investition in das Portefeuille. Am Verfalltag der Option liefert das Hedgeportefeuille den gewünschten Wert, da im Verfalltermin der *Black/Scholes*-Wert mit dem Ausübungswert der Option übereinstimmt. Hieraus ergibt sich folgendes

RESULTAT 5: *Der Black/Scholes-Wert auf Basis der Diffusionsvarianz gibt eine untere Schranke für den tatsächlichen Wert der Option an.*

Wird die Option nämlich zu dem Preis $F^{BS}(\sigma_D^2)$ gehandelt, so lohnt sich ein *Kauf* der Option bei gleichzeitigem *Verkauf* des *Black/Scholes*-Hedgeportefeuilles. Im Fall eines Sprungs führt diese Strategie zu einer Einzahlung in Höhe von dC . Findet kein Sprung statt, so ist diese Strategie selbstfinanzierend. *Naik/Lee* (1990) sprechen daher davon, daß man zum Hedgen des Calls ein *sprungfinanzierendes* Wertpapier benötigt, das einen Zahlungsstrom von genau dC besitzt. Wenn außer der Arbitragefreiheit keine weiteren Annahmen gemacht werden, läßt sich auch zeigen, daß $F^{BS}(\sigma_D^2)$ die *größte untere*

²⁴ Eine Hedgeratio, die der Ableitung des Portefeuillewerts nach dem Aktienkurs entspricht, heißt Delta-Hedgeratio.

Schranke für den Optionswert ist und die *kleinste obere Schranke* durch den Aktienpreis S gegeben ist.

4.2 Black/Scholes-Strategie auf Basis der Gesamtvarianz

Nehmen wir nun an, daß der Stillhalter richtigerweise Kurssprünge erwartet, aber aus Vereinfachungsgründen das einfachere *Black/Scholes*-Modell auf der Basis der Gesamtvarianz σ_{tot}^2 heranzieht. Als Hedgeratio ergibt sich dann:

$$\phi = F_s^{BS}(S_-, \sigma_{tot}) = N(d_1(S_-, \sigma_{tot})). \tag{37}$$

Der Hedgefehler beträgt nun

$$dC = \Delta F^{BS}(\sigma_{tot}) - F_s^{BS}(S_-, \sigma_{tot}) \Delta S - \frac{1}{2} F_{ss}^{BS}(S_-, \sigma_{tot}) S_-^2 \sigma_{jump}^2 dt. \tag{38}$$

Der Hedgefehler, der aufgrund eines Sprungs im Aktienkurs entsteht, ist auch hier stets positiv. Diese Strategie ist jedoch in Stetigkeitspunkten des Aktienpreisprozesses nicht länger selbstfinanzierend, da ein ständiger Zahlungsstrom von $\frac{1}{2} F_{ss}^{BS}(S_-) S_-^2 \sigma_{jump}^2 dt$ erfolgt.

Abbildung 8 zeigt den durch den Sprung verursachten Hedgefehler der beiden *Black/Scholes*-Strategien. Die durchgezogene Linie stellt den *Black/Scholes*-Wert für die Parameter $r = 0,1$, $K = 100$, $T = 1/12$ sowie $\sigma^2 = \sigma_D^2 = 0,018$ (Bild A) und $\sigma^2 = \sigma_{tot}^2 = 0,09$ (Bild B) dar (*nach* einem Ausgleich des Hedgefehlers). Die gestrichelte Linie zeigt den Wert des Hedgeportefeuilles, das zuletzt in t^- angepaßt wurde, *vor* einem Ausgleich des Hedgefehlers in t und vor einer Anpassung des Portefeuilles in t . In beiden Bildern tangiert die gestrichelte Linie die Funktion des *Black/Scholes*-Wertes. Der Fehler, der durch einen *Sprung* in S hervorgerufen wird, ergibt sich aus der Differenz der beiden Kurven und ist wegen der Konvexität der *Black/Scholes*-Funktion stets positiv. Findet eine Veränderung des Aktienpreises nur aufgrund der Diffusionskomponente statt (kein Sprung), so ergibt sich *allein aus der stochastischen Änderung des Aktienkurses* bei beiden Strategien kein Hedgefehler, denn bei infinitesimalen Änderungen besteht eine lokal perfekte Korrelation zwischen der durchgezogenen und der gestrichelten Linie. Ist S stetig in t , so ist die erste Strategie in t selbstfinanzierend; ein Hedgefehler entsteht bei der zweiten Strategie jedoch aufgrund des dt -Terms in Gleichung (38).

4.3 Mertons Strategie bei nicht diversifizierbarer Sprungkomponente

Merton (1976) unterstellt in seinem Modell die Diversifizierbarkeit des Sprungrisikos. Ein Stillhalter, der in seinem Modell richtigerweise Sprünge erwartet, aber fälschlicherweise annimmt, sie seien unsystematisch, wird folglich gemäß Mertons Modell hedgen. Wegen der unterstellten Diversifikation des

Abbildung 8: Black/Scholes-Hedgefehler aufgrund von Sprüngen im Aktienkurs

Parameter: $r = 0,1$, $K = 100$, $T = 1/12$ und $k = 0,105$.

Bild A: Black/Scholes-Strategie auf der Basis von $\sigma_D^2 = 0,018$

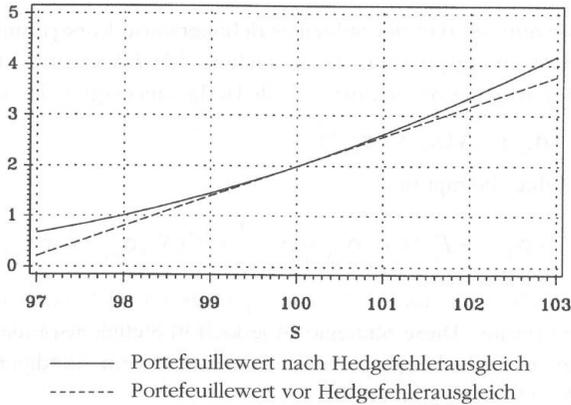
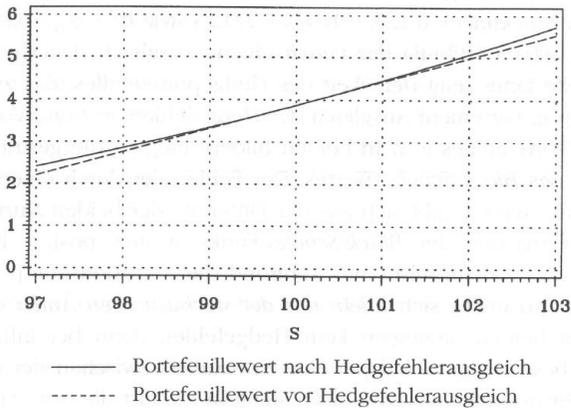


Bild B: Black/Scholes-Strategie auf der Basis von $\sigma_{tot}^2 = 0,09$



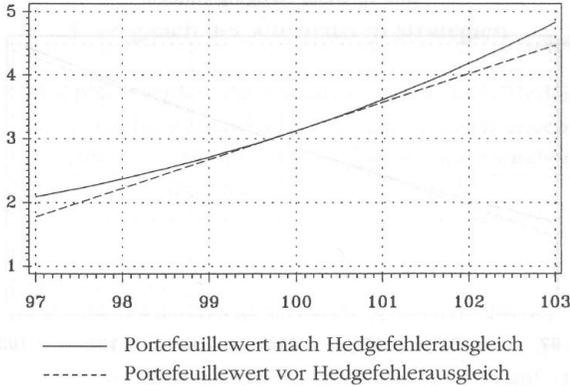
Sprungrisikos sichert diese Strategie nur das Diffusionsrisiko ab. Als Hedgeratio wird folglich die Ableitung des Portfoliowertes nach dem Aktienkurs (Delta-Hedgingstrategie) gewählt:

$$\phi^{Me} = F_s^{Me}(S_-) = \sum_n e^{-\lambda'\tau} \frac{(\lambda'\tau)^n}{n!} N(d_1(S_-, n)) \quad (39)$$

$$F^{Me} = \sum_n e^{-\lambda'\tau} \frac{(\lambda'\tau)^n}{n!} F^{BS}(S, K, \tau, r_n, \sigma_n) \quad (40)$$

Abbildung 9: Mertons Hedgefehler aufgrund von Sprüngen im Aktienkurs

Parameter: $r = 0,1$, $K = 100$, $T = 1/12$, $\sigma_{tot} = 0,3$, $\gamma = 0,8$, $\lambda = 3$, $k = 0,105$.



mit

$$\lambda' \equiv \lambda(k+1),$$

$$\sigma_n^2 \equiv \sigma_D^2 + n\sigma_j^2 / \tau,$$

$$r_n \equiv r - \lambda k + n\alpha_j / \tau$$

$$d_1(S_-, n) \equiv (\ln(S_- / K) + (r_n + 0,5\sigma_n^2)\tau) / (\sigma_n \sqrt{\tau}).$$

Es resultiert wieder ein Hedgefehler, der keine Diffusionskomponente enthält:

$$dC^{Me} = \Delta F^{Me} - F_s^{Me} \Delta S + (\lambda k S F_s^{Me} - \lambda E_L(\Delta F^{Me})) dt. \quad (41)$$

Diese Strategie ist *im Mittel selbstfinanzierend*. Abbildung 9 zeigt wieder den Wert des Portfeuillewertes in t vor und nach einem Ausgleich des Hedgefehlers in t . Der Fehler, der durch den Sprung der Aktie entsteht, ist auch hier wegen der Tangenteneigenschaft und wegen der Konvexität von F^{Me} stets positiv. Dieser Fehler wird aber durch die Drift der Aktie und durch eine entsprechend gewählte Bondkomponente *im Mittel* kompensiert.

4.4 Delta-Hedging im Bates-Modell

Zum Abschluß wollen wir noch eine Delta-Hedgingstrategie im Modell von Bates betrachten: Wir unterstellen einen Stillhalter, der zwar richtig mit dem Bates-Modell bewertet, aber fälschlicherweise eine Delta-Hedgingstrategie zur Absicherung benutzt. Seine Hedgeratio ist demnach gegeben durch

$$\phi^{BA} = F_s^{Ba}(S_-). \quad (42)$$

Abbildung 10: Bates' Hedgefehler aufgrund von Sprüngen im Aktienkurs

Parameter: $r = 0,1$, $K = 100$, $T = 1/12$, $\sigma_{tot} = 0,3$, $\gamma = 0,8$, $\lambda = 3$ und $k = 0,105$.

Bild A: Delta-Hedgingstrategie

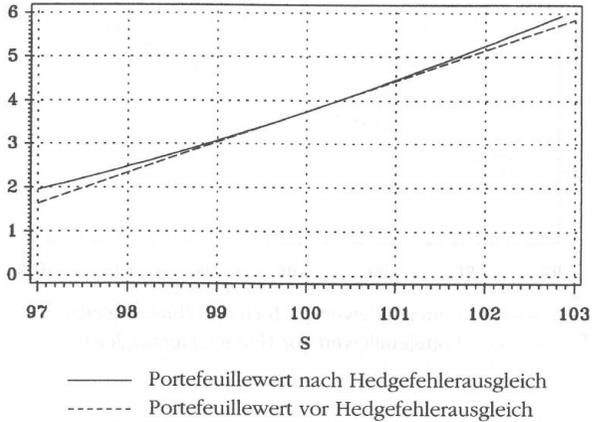


Bild B: Lokal varianzminimierende Hedgingstrategie

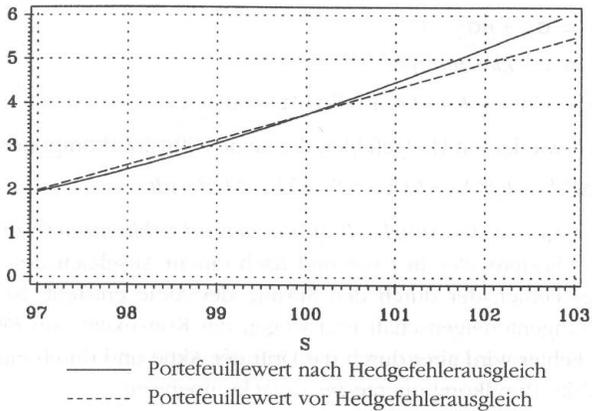


Abbildung 10 vergleicht die Delta-Hedgingstrategie mit der lokal varianzminimierenden Strategie im Bates-Modell. Die Tangentialeigenschaft der Delta-Hedgingstrategie macht deutlich, daß bei dieser Strategie das Diffusionsrisiko abgesichert wird. Die lokal varianzminimierende Strategie schützt dagegen vor beiden Risiken in gleichem Maße. Im Vergleich zur lokal risikominimierenden Strategie aus *Abbildung 7* fällt auf, daß hier die Hedgeratio kleiner als die Ableitung des Portefeuillevwerts nach dem Aktienkurs ist, obwohl die mittlere

Sprunghöhe positiv ist. Das folgt aus der Risikoaversion des Investors, der bei Sprüngen nach unten möglichst gut abgesichert sein möchte.

5 Vergleich der alternativen Strategien

In diesem Abschnitt werden die varianzminimierenden Hedgingstrategien den in Abschnitt 4 beschriebenen Delta-Hedgingstrategien gegenübergestellt. Neben einem Vergleich der Hedgeratios wollen wir insbesondere die Verteilung der Hedgingkosten analysieren.

5.1 Vergleich der Hedgeratios

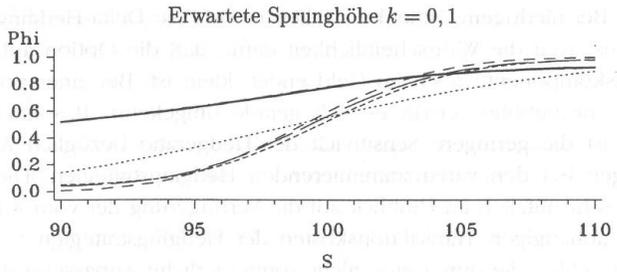
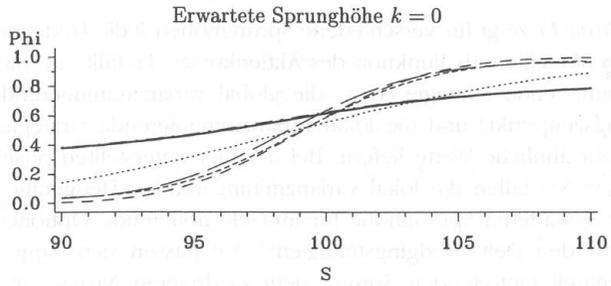
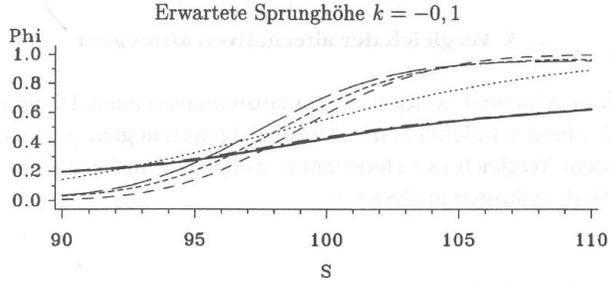
Abbildung 11 zeigt für verschiedene Sprunghöhen k die Hedgeratios der alternativen Strategien als Funktion des Aktienkurses. Es fällt auf, daß die lokal risikominimierende Strategie (bzw. die global varianzminimierende Strategie im Anfangszeitpunkt) und die lokal varianzminimierende Strategie im Bates-Modell sehr ähnliche Werte liefern. Bei der hier unterstellten positiven Überrendite von 5% fallen die lokal varianzminimierenden Hedgeratios bei einer negativen erwarteten Sprunghöhe für im-Geld-notierende Optionen niedriger aus als bei den Delta-Hedgingstrategien²⁵. Sie passen sich damit schon vor dem eventuell eintretenden Sprung dem niedrigeren Niveau an. Bei einer Delta-Hedgingstrategie müßte diese Anpassung unmittelbar nach dem Sprung erfolgen. Bei niedrigem Aktienkurs fallen jedoch die Delta-Hedgingstrategien kleiner aus, weil die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Option aufgrund der Diffusionskomponente noch im Geld endet, klein ist. Bei einer positiven erwarteten Sprunghöhe verhält es sich gerade umgekehrt. Besonders hervorzuheben ist die geringere Sensitivität der Hedgeratio bezüglich Aktienkursänderungen bei den varianzminimierenden Hedgingstrategien. Diese Eigenschaft ist sehr nützlich im Hinblick auf die Verringerung der vom Anpassungsvolumen abhängigen Transaktionskosten der Hedgingstrategien²⁶. Außerdem fallen die Fehler, die durch eine nicht kontinuierliche Anpassung des Hedgeportefeuilles entstehen, durch die geringere Sensitivität niedriger aus.

25 Wie bereits in Abschnitt 4 erwähnt, stimmt der lokal risikominimierende Portefeuillewert für $(\alpha - r) = 0$ mit MERTONS Wert überein. *Abbildung 7* zeigt daher auch die Unterschiede dieser beiden Werte, wenn die Überrendite variiert. Bei einer mittleren Sprunghöhe von null sind beide Werte sehr ähnlich. Die Werte unterscheiden sich aber erheblich, wenn die Absolutbeträge von $\alpha - r$ und k groß werden.

26 Diese Transaktionskosten wurden im Modell allerdings vernachlässigt.

Abbildung 11: Hedgeratios als Funktion des Aktienkurses

Parameter: $K = 100$, $r = 0,1$, $T = 1/12$, $\alpha = 0,15$, $\lambda = 1$, $\sigma_{tot} = 0,3$, $\gamma = 0,8$, $\delta = 1$.



- LRM
- - - Merton
- - - Black/Scholes (σ_D)
- Black/Scholes (σ_{tot})
- · - Bates (Delta)
- · - Bates (LVM)

5.2 Vergleich der Absicherungskosten

Zum Vergleich der verschiedenen Strategien werden die gesamten (diskontierten) Hedgingkosten Γ_T mit Hilfe einer Monte-Carlo-Simulation mit 10 000 Läufen erzeugt²⁷. Das Hedgeportefeuille wird einmal pro Woche angepaßt. Da die Modelle von einer kontinuierlichen Anpassung ausgehen, entsteht dadurch jedoch ein zusätzlicher Hedgefehler.

Tabelle 3 zeigt die anfängliche Netto-Investition, die ersten vier Momente sowie Maximum, Minimum und neun Quantile der empirischen Verteilung der diskontierten Hedgingkosten für einen europäischen Call. Dabei wurde mit $k = -20\%$ die erwartete Sprunghöhe verhältnismäßig hoch gewählt. Bei kontinuierlicher Anpassung sind die lokal risikominimierende Strategie und die Strategie von *Merton* im Mittel selbstfinanzierend. In der Simulation entstehen jedoch durch die diskrete Anpassung Differenzen zwischen den Anfangskosten und den mittleren Kosten, die kleiner werden, je öfter das Portefeuille angepaßt wird. Es ist bemerkenswert, daß die mittleren Kosten aller Strategien recht nah beieinander liegen, obwohl die Anfangskosten zum Teil erheblich differieren (*Bates-LVM*: 20,74 vs. *Black/Scholes* (σ_D):11,20). Die Abweichungen im Anfangswert werden durch eine Drift im Hedgefehler teilweise kompensiert. Konstruktionsgemäß sind die Standardabweichungen der varianzminimierenden Strategien kleiner. Auffällig ist, daß für diese Strategien auch die Schiefe kleiner ausfällt, während die Kurtosis sehr hoch ist. Besonders hervorzuheben ist, daß die 99%- , 95%- und 90%-Quantile für die varianzminimierenden Strategien wesentlich günstiger ausfallen. Während bei den varianzminimierenden Strategien die Hedgingkosten mit 99% Wahrscheinlichkeit unter 34,31 (bzw. 34,53 und 34,20) liegen, muß bei den Delta-Hedgingstrategien bei gleicher Wahrscheinlichkeit mit Hedgingkosten bis 43,43 (bzw. 44,41 oder 43,28 oder 48,31) gerechnet werden. Für die 95%- und 90%-Quantile verhält es sich ähnlich.

Abbildung 12 visualisiert die empirische Verteilung der Hedgingkosten für eine mittlere Sprunghöhe von $k = -10\%$. Auch wird noch einmal gut sichtbar, daß die varianzminimierenden Strategien geringere hohe Quantile besitzen und (konstruktionsgemäß) eine geringere Varianz. Der Modus fällt jedoch bei den Delta-Hedgingstrategien günstiger aus. Sehr deutlich ist dies bei der *Black/Scholes*-Strategie auf Basis der Diffusionsvarianz, bei der mit einer relativen Häufigkeit von 42,8% die gesamten Hedgingkosten zwischen 10,5 und 11,5 liegen. Das liegt darin begründet, daß diese Strategie – wenn man von der diskreten Anpassung des Portefeuilles einmal absieht – selbstfinanzierend

27 Wir benutzen das Verfahren der empirischen Martingalsimulation von DUAN und SIMONATO (1996).

Tabelle 3: Simulierte Häufigkeitsverteilung der gesamten diskontierten Hedgingkosten

$S = 100, K = 100, \lambda = 1, k = -0,2, \sigma_{tot} = 0,3, \gamma = 0,8, T = 1, \alpha = 0,15, r = 0,1, \delta = 1$

Gesamt- kosten	Hedgingstrategien						
	LRM	GVM	Bates (LVM)	Bates (Delta)	Merton	B/S (σ_{tot}^2)	B/S (σ_D^2)
(Anfangskosten)	(19,00)	(19,00)	(20,74)	(20,74)	(18,07)	(16,73)	(11,20)
Mittelwert	18,91	18,91	18,86	18,01	17,96	18,08	17,80
Stdabw.	4,92	4,90	4,95	7,89	8,18	7,41	9,51
Schiefe	0,82	0,89	0,81	1,55	1,57	1,73	1,51
Kurtosis	3,08	3,76	2,80	1,95	1,99	2,91	1,71
Maximum	55,84	56,24	55,46	57,94	59,82	60,73	65,56
99% Quantil	34,31	34,53	34,20	43,43	44,41	43,28	48,31
95% Quantil	27,39	27,25	27,52	34,66	35,27	33,83	37,79
90% Quantil	24,16	24,04	24,40	30,62	30,65	29,36	32,47
75% Quantil	21,28	21,18	21,25	21,18	21,85	21,05	23,11
50% Quantil	18,96	19,03	18,87	14,79	14,49	14,69	11,76
25% Quantil	15,92	16,03	15,82	12,97	12,69	13,57	11,27
10% Quantil	12,95	12,99	12,89	11,42	11,48	12,41	11,10
5% Quantil	11,19	11,18	11,17	10,60	10,81	11,60	11,00
1% Quantil	8,33	8,31	8,33	9,42	9,34	10,02	10,71
Minimum	4,75	4,39	4,78	8,24	8,80	7,71	9,52

ist, wenn kein Sprung auftritt. Das ist bei den hier gewählten Parametern immerhin in $P(N_t = 0) = e^{-\lambda t} = 37\%$ der Fälle gegeben.

6 Zusammenfassung

Wir modellieren das Risiko von Aktienkursprüngen mit Hilfe eines Sprung-Diffusionsmodells, wie es von *Merton* (1976) in die Theorie der Bewertung und des Hedgings von Optionen eingeführt wurde. Der Vorteil dieses Modells besteht u. a. darin, daß es im Unterschied zum reinen Diffusionsmodell von *Black* und *Scholes* die beobachtbare Schiefe und Leptokurtosis der Verteilung von Aktienkursrenditen erklären kann. Zudem lassen sich damit Kursprünge modellieren, die zunehmend häufiger an Finanzmärkten beobachtet werden

Abbildung 12: (a) Simulierte Häufigkeitsverteilung der gesamten diskontierten Hedgingkosten

$S = 100, K = 100, \lambda = 1, k = -0,1, \sigma_{tot} = 0,3, \gamma = 0,8, T = 1, \alpha = 0,15, r = 0,1, \delta = 3.$

Die Höhe der Säulen beschreibt die relative Häufigkeit dafür, daß die kumulierten (diskontierten) Hedgingkosten Γ_T in dem Intervall $[\Gamma_T - 0,5; \Gamma_T + 0,5]$ liegen. Bei 47 ist die Häufigkeit, daß die Kosten über 46,5 liegen, abgebildet.

Bild A: Lokal risikominimierende Strategie

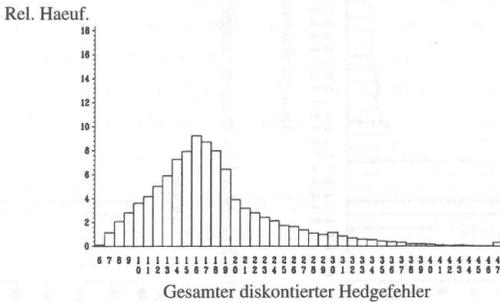


Bild B: Global varianzminimierende Strategie

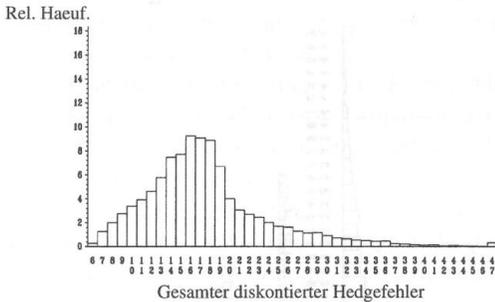
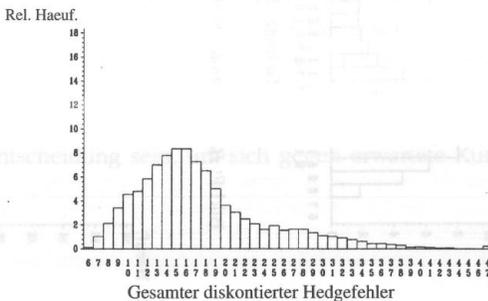


Bild C: Lokal varianzminimierende Strategie bei Bates



und insbesondere aus der Sicht eines Stillhalters einer Option ein finanzielles Risiko bergen.

Unser Interesse gilt in erster Linie der Berechnung der von *Schweizer* (1988, 1991) eingeführten *lokal risikominimierenden* Hedgingstrategie (von uns auch *lokal varianzminimierend* genannt) für unseren Modellrahmen. Wir berechnen den Portefeuillewert und die Hedgeratio und untersuchen deren Sensitivität bezüglich Parameteränderungen. Der *lokal risikominimierenden* Strategie werden eine *global varianzminimierende* Hedgingstrategie und eine *lokal varianzminimierende* Hedgingstrategie im Gleichgewichtsmodell von *Bates* (1991) gegenübergestellt. Mit Hilfe einer Monte-Carlo-Simulation vergleichen wir zudem die gesamten Hedgingkosten dieser varianzminimierenden Strategien mit Delta-Hedgingstrategien in den Modellen von *Black/Scholes* (1973), von *Merton* (1976) und von *Bates* (1991). Aufgrund der gefundenen Zusammenhänge zeichnen sich die varianzminimierenden Hedgingstrategien im Vergleich zu den Delta-Hedgingstrategien durch folgende Eigenschaften aus:

- Varianzminimierende Hedgingstrategien *antizipieren* zukünftige Hedgeratios auf der Basis der *mittleren Sprunghöhe* im Aktienkurs. Springt der Aktienkurs im Mittel nach unten, so sind die varianzminimierenden Hedgeratios kleiner als die Delta-Hedgeratios, solange der Call nicht deutlich aus dem Geld notiert. Bei einem erwarteten Sprung nach oben verhält es sich gerade umgekehrt.
- Varianzminimierende Hedgingstrategien reagieren *weniger sensitiv* als andere Absicherungsstrategien auf Änderungen im Basiswert. Bedenkt man, daß in der Realität bei Umschichtungen des Portefeuilles volumenabhängige Transaktionskosten anfallen bzw. Anpassungen des Portefeuilles nicht wie im Modell vorgesehen zeitstetig stattfinden können, so erweist sich diese Eigenschaft als vorteilhaft.
- Varianzminimierende Hedgingstrategien zeigen ein *überlegenes Worst-Case-Verhalten*: Die 99%-, 95%- und 90%-Quantile der mit diesen Hedgingstrategien verbundenen Verteilung der Hedgingkosten sind deutlich niedriger als bei Delta-Hedgingstrategien.

Natürlich steht und fällt der Vorteil von varianzminimierenden Strategien im Vergleich zu den Delta-Strategien mit der Verlässlichkeit der geschätzten Prozeßparameter, insbesondere der erwarteten Sprunghöhe. Letztere Größe ist jedoch zumindestens in Aktienmärkten tendenziell negativ. Eine im Vergleich zur Hedgeratio im *Black/Scholes* geringere Hedgeratio wird daher fast immer die bessere Entscheidung sein, um sich gegen erwartete Kurssprünge zu hedgen.

Anhang

Eine detaillierte Darstellung der folgenden Beweise findet sich in *Grünwald/Trautmann* (1996) und *Grünwald* (1997). Im Gegensatz zu diesen und anderen angegebenen Quellen betrachten wir für die folgenden Rechnungen *nichtdiskontierte* Prozesse. Die Ergebnisse lassen sich jedoch leicht auf diskontierte Prozesse übertragen.

(A) Erfüllung der Regularitätsbedingungen

Der Aktienpreisprozeß S ist bei bekannter Anzahl der Sprünge lognormalverteilt. Das impliziert, daß alle Momente des Preisprozesses in T existieren. Da S zudem positiv ist, folgt insbesondere auch, daß die (positive) Driftkomponente A und die (positive) Martingalkomponente M quadratintegrierbar sind. Damit ist die erste Regularitätsbedingung (X1) aus *Schweizer* (1991) erfüllt.

Das durch $d\langle M, M \rangle = S_-^2 \sigma_{\text{tot}}^2 dt$ definierte Maß besitzt als Maß über dt das ganze Intervall $[0, T]$ als Träger (Regularitätsbedingung (X2)). Der Driftterm des Aktienpreisprozesses ist durch

$$dA = \alpha S_- dt = \frac{\alpha S_-}{\sigma_{\text{tot}}^2 S_-^2} \sigma_{\text{tot}}^2 S_-^2 dt = \frac{\alpha S_-}{\sigma_{\text{tot}}^2 S_-^2} d\langle M, M \rangle \quad (\text{A.1})$$

gegeben, ist also als Integral über dt pfadstetig (Regularitätsbedingung (X3)). Zudem ist A absolut stetig bezüglich der vorhersehbaren Kovariation von M (Regularitätsbedingung (X4)). Da ferner ein Poissonprozeß zu jedem Zeitpunkt – also auch in T – fast sicher stetig ist, d. h. $P(\Delta N_t = 1) = 0$ für alle t , ist auch S in T fast sicher stetig (Regularitätsbedingung (X5)). Die von *Schweizer* (1991) geforderten Bedingungen für die Äquivalenz von lokaler Risikominimierung und der Eigenschaft, daß der Kostenprozeß C (bzw. Γ) ein zu M orthogonales Martingal darstellt, sind demnach erfüllt.

(B) Gestalt der minimalen Martingaldichte

Gemäß *Schweizer* (1992) ergibt sich die minimale Martingaldichte als stochastisches Exponential²⁸ $\mathcal{E}(-X)$ mit

28 Die Exponentialformel für Semimartingale ist eine Verallgemeinerung der Exponentialfunktion $\exp(x)$, vgl. PROTTER (1990, S. 77). Sie ergibt sich als Spezialfall der verallgemeinerten Itô-Formel.

$$X = \int \frac{dA - S_- r dt}{d\langle M, M \rangle} dM \quad (\text{A.2})$$

$$\int \frac{(\alpha - r) S_-}{\sigma_{tot}^2 S_-^2} (S_- \sigma_D dW + S_- IdN - S_- \lambda k dt) \quad (\text{A.3})$$

$$= \frac{(\alpha - r) \sigma_D}{\sigma_{tot}^2} W + \sum_{i=1}^N \frac{(\alpha - r)}{\sigma_{tot}^2} L_i - \frac{(\alpha - r) \lambda k}{\sigma_{tot}^2} t. \quad (\text{A.4})$$

Mit Hilfe der Exponentialformel für Semimartingale folgt Gleichung (23).

(C) Zur Berechnung des lokal risikominimierenden Portefeuillewerts

Mit Hilfe von Girsanovs Theorem²⁹ läßt sich zeigen, daß die Sprungan-
kfunftsrate unter dem minimalen Martingalmaß durch

$$\hat{\lambda} = \lambda - \lambda k \frac{\alpha - r}{\sigma_{tot}^2} \quad (\text{A.5})$$

gegeben ist. Als Dichtefunktion für einen Sprung in der Log-Rendite erhält man

$$f^L = \hat{a} \varphi((\alpha_j - 0,5\sigma_j^2); \sigma_j^2) + (1 - \hat{a}) \varphi((\alpha_j + 0,5\sigma_j^2); \sigma_j^2) \quad (\text{A.6})$$

mit

$$\hat{a} \equiv \frac{\lambda}{\hat{\lambda}} \left(1 + \frac{\alpha - r}{\sigma_{tot}^2} \right),$$

$\varphi(\mu, \sigma^2) \equiv$ Dichte einer Normalverteilung mit Mittelwert μ und Varianz σ^2 .

Ein Sprung ist demnach gemischt normalverteilt³⁰. Das läßt die folgende In-
terpretation zu: Mit einer Wahrscheinlichkeit von \hat{a} ist der Sprung normalver-
teilt mit Erwartungswert $\alpha_j - 0,5\sigma_j^2$ und Varianz σ_j^2 . Mit einer Wahrscheinlich-
keit von $1 - \hat{a}$ beträgt der Erwartungswert $\alpha_j + 0,5\sigma_j^2$. Aus dem Faltungssatz
für normalverteilte Zufallsvariablen ergibt sich dann, daß die Summe von n
Sprüngen $\sum_{i=1}^n \ln(1 + L_i)$ folgende Dichte besitzt:

$$f_n^L = (\hat{a} \varphi((\alpha_j - 0,5\sigma_j^2); \sigma_j^2) + (1 - \hat{a}) \varphi((\alpha_j + 0,5\sigma_j^2); \sigma_j^2))^n \quad (\text{A.7})$$

$$= \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \hat{a}^l (1 - \hat{a})^{n-l} \varphi((n\alpha_j + (n-2l)0,5\sigma_j^2); n\sigma_j^2). \quad (\text{A.8})$$

29 GIRSANOV'S Theorem zeigt, wie sich Martingale bei einem Wechsel des Wahr-
scheinlichkeitsmaßes verhalten, vgl. JACOD/SHIRYAEV (1987, S. 155f).

30 Das bedeutet, daß sich die Dichtefunktion als gewichtete Summe von (hier zwei)
Normalverteilungsdichten schreiben läßt. Allerdings kann ein Gewicht einen negati-
ven Wert annehmen.

Der lokal risikominimierende Portfeuillewert ergibt sich als Erwartungswert $\exp(-rt)E^m((S_T - K)^+)$. Bedingt man den Erwartungswert zum einen bezüglich der Anzahl der Sprünge n und zum anderen bezüglich l (d. h. bezüglich der Normalverteilungskomponenten des Dichteprozesses der Sprünge), so kann analog zum *Black/Scholes*-Modell der Portfeuillewert berechnet werden:

$$F^L = e^{-rT} E^m((S_T - K)^+) \quad (\text{A.9})$$

$$= e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} E^m((S_T - K)^+ \cdot \mathbf{1}_{\{N_T = n\}} \mathbf{1}_{\{l\}}) \quad (\text{A.10})$$

$$= e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} P^m(N_T = n) \cdot \quad (\text{A.11})$$

$$\sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \hat{a}^l (1 - \hat{a})^{n-l} E^m((S_0 \exp(\ln(S_T / S_0) - K)^+ | N_T = n; l))$$

Das entspricht der Summe über *Black/Scholes*-Werte, da für festes n und festes l die Log-Rendite unter dem minimalen Martingalmaß normalverteilt ist mit Erwartungswert $(r - \hat{\lambda} \hat{k} - 0,5 \sigma_B^2) T + (n \alpha_j + (n - 2l) 0,5 \sigma_j^2) = (r_{n,l} - 0,5 \sigma_n^2) T$ und Varianz $\sigma_B^2 T + n \sigma_j^2 = \sigma_n^2 T$. Deshalb gilt:

$$F^L = e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\hat{\lambda} T} \left(\frac{(\hat{\lambda} T)^n}{n!} \right) \quad (\text{A.12})$$

$$\cdot \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \hat{a}^l (1 - \hat{a})^{n-l} \cdot e^{r_{n,l} T} \{ S_0 N(d_{n,l}^1) - e^{-r_{n,l} T} K N(d_{n,l}^2) \}$$

mit

$$d_{n,l}^1 \equiv \frac{\ln(S_0 / K) + (r_{n,l} + 0,5 \sigma_n^2) T}{\sqrt{\sigma_n^2 T}}$$

$$d_{n,l}^2 \equiv d_{n,l}^1 - \sqrt{\sigma_n^2 T}$$

Durch Umformung erhält man

$$e^{-rT} e^{-\hat{\lambda} T} \frac{(\hat{\lambda} T)^n}{n!} \binom{n}{l} \hat{a}^l (1 - \hat{a})^{n-l} e^{r_{n,l} T} \quad (\text{A.13})$$

$$= \exp(-\hat{\lambda}(\hat{k} + 1)T) \frac{(\hat{\lambda}(\hat{k} + 1)T)^n}{n!} \binom{n}{l} \left(\frac{a}{\hat{\lambda}(\hat{k} + 1)} \right)^l \left(\frac{b}{\hat{\lambda}(\hat{k} + 1)} \right)^{n-l}$$

$$= a_{n,l}$$

(Für a und b vgl. Resultat 2.) Deshalb folgt

$$F^L = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^n a_{n,l} F^{BS}(S, K, r_{n,l}, \sigma_n^2 T). \quad (\text{A.14})$$

(D) Zur Berechnung der lokal risikominimierenden Hedgeratio

Der Hedgefehler ist durch

$$C^L - C_0^L = F^L - \int \phi^L dS - \int \eta^L dB \quad (\text{A.15})$$

gegeben. Aus der Orthogonalität des Hedgefehlers zu der Martingalkomponente des Preisprozesses folgt:

$$d\langle F^L - \int \phi^L dS - \int \eta^L dB, M \rangle = d\langle C^L - C_0^L, M \rangle = 0 \quad (\text{A.16})$$

Da zum einen die Integranden vor die Kovariation gezogen werden können und da die Kovariation von B mit einem beliebigen Prozeß immer null ergibt, folgt:

$$0 = d\langle F^L, M \rangle - \phi^L d\langle S, M \rangle \quad (\text{A.17})$$

$$\text{und damit } \phi^L = \frac{d\langle F^L, M \rangle}{d\langle S, M \rangle} = \frac{d\langle F^L, S \rangle}{d\langle S, S \rangle} = \frac{d\langle F^L, M \rangle}{d\langle M, M \rangle} \quad (\text{A.18})$$

Letztes und vorletztes Gleichheitszeichen gelten wegen der Stetigkeit der Driftkomponenten. Eine Aufteilung der Hedgeratio in Diffusions- und Sprungkomponente ergibt wegen $M = M^c + M^d$.³¹

$$\phi^L = \frac{d\langle F^L, M^c \rangle}{d\langle M^c, M^c \rangle} \frac{d\langle M^c, M^c \rangle}{d\langle M, M \rangle} + \frac{d\langle F^L, M^d \rangle}{d\langle M^d, M^d \rangle} \frac{d\langle M^d, M^d \rangle}{d\langle M, M \rangle} \quad (\text{A.19})$$

$$= (1 - \gamma) F_s^L + \gamma \frac{E_L(\Delta F^L \Delta S)}{E_L((\Delta S)^2)} \quad (\text{A.20})$$

Nun müssen die Erwartungswerte über L bestimmt werden. Dafür benötigen wir folgende Beziehungen für eine Zufallsvariable X , die normalverteilt ist mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 . Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $b > 0$, dann gilt:

$$E\left(N\left(\frac{cX + a}{b}\right)\right) = N\left(\frac{c\mu + a}{\sqrt{b^2 + c^2\sigma^2}}\right) \quad (\text{A.21})$$

$$E\left(e^X N\left(\frac{cX + a}{b}\right)\right) = e^{\mu + 0,5\sigma^2} N\left(\frac{c(\mu + \sigma^2) + a}{\sqrt{b^2 + c^2\sigma^2}}\right) \quad (\text{A.22})$$

$$E\left(e^{cX} N\left(\frac{X + a}{b}\right)\right) = e^{c\mu + 0,5c^2\sigma^2} N\left(\frac{\mu + c\sigma^2 + a}{\sqrt{b^2 + \sigma^2}}\right) \quad (\text{A.23})$$

Die Auswertung von Gleichung (A.20) führt zur expliziten Hedgeratio (26).

31 Vgl. COLWELL/ELLIOTT (1993) für eine allgemeine, abstrakte Darstellung.

Literaturverzeichnis

- BARDHAN, I./CHAO X. (1996): *On Martingale Measures when Asset Returns have Unpredictable Jumps*, Stochastic Processes and their Applications 63, 35–54.
- BATES, C. A. (1991): *The Crash of '87, Was it Expected? The Evidence from Options Markets*, Journal of Finance, Vol. 46, 1009–1044.
- BEINERT, M. (1997): *Kurssprünge und der Wert Deutscher Aktienoptionen*, Gabler Verlag, Wiesbaden.
- BEINERT, M./TRAUTMANN, S. (1991): *Jump-Diffusion Models of German Stock Returns – A Statistical Investigation*, Statistical Papers Vol. 32, 269–280.
- BLACK, F./SCHOLES, M. (1973): *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, The Journal of Political Economy, Vol. 81, No. 3, 637–654.
- COLWELL, D. B./ELLIOTT, R. J. (1993): *Discontinuous Asset Prices and Non-Attainable Contingent Claims*, Mathematical Finance, Vol. 3, No. 3, 295–308.
- COX, J. C./ROSS, S. A. (1975): *The Pricing of Options for Jump Processes*, Rodney L. White Center Working Paper No. 2–75, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA.
- COX, J. C./ROSS, S. A./RUBINSTEIN, M. (1979): *Option Pricing: A Simplified Approach*, Journal of Financial Economics 7, 229–263.
- COX, J. C./RUBINSTEIN, M. (1985): *Options Markets*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- DELLACHERIE, C./MEYER, P.-A. (1982): *Probabilities and Potential*, North-Holland.
- DUAN, J.-CH./SIMONATO, J.-G. (1996): *Empirical Martingale Simulation for Asset Prices*, Working Paper, McGill University Montreal, Canada.
- DUFFIE, D. (1992): *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton University Press, Princeton NJ.
- DYBVID, P. H./INGERSOLL, J. E. (1982): *Mean-Variance Theory in Complete Markets*, Journal of Business, Vol. 5, No. 2, 233–251.
- EBERLEIN, E./JACOD, J. (1995): *On the Range of Options Prices*, Arbeitspapier Freiburger Zentrum für Datenanalyse und Modellbildung, Nr. 18.
- FÖLLMER, H./SCHWEIZER, M. (1989): *Hedging by Sequential Regression: An Introduction to the Mathematics of Option Trading*, The ASTIN Bulletin 18, 147–160.
- FÖLLMER, H./SCHWEIZER, M. (1991): *Hedging of Contingent Claims under Incomplete Information*, Applied Stochastic Analysis, Stochastic Monographs (M. H. A. DAVIS/ELLIOTT R. (eds.)) 389–414.
- FÖLLMER, H./SONDERMANN, D. (1986): *Hedging of Non-Redundant Contingent Claims*, Contributions to Mathematical Economics, 205–223.
- GRÜNEWALD, B. (1997): *Hedging in unvollständigen Märkten am Beispiel des Sprung-Diffusionsmodells*, Dissertationentwurf, Johannes Gutenberg-Universität Mainz.
- GRÜNEWALD, B./TRAUTMANN, S. (1996): *Option Hedging in the Presence of Jump Risk*, Arbeitspapier, Johannes Gutenberg-Universität Mainz.
- JACOD, J./SHIRYAEV, A. N. (1987): *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer Verlag, Berlin.
- JACKWERTH, J. C./RUBINSTEIN, M. (1996): *Recovering Probability Distributions from Option Prices*, The Journal of Finance, Vol. 51, No. 5, 1611–1632.
- MERTON, R. C. (1976): *Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous*, Journal of Financial Economics, Vol. 3, 125–144.
- MONAT, P./STRICKER, CH. (1995): *Föllmer-Schweizer Decomposition and Mean-Variance Hedging for General Claims*, The Annals of Probability, Vol. 23, No. 2, 605–628.
- NAIK, V./LEE, M. (1990): *General Equilibrium Pricing of Options on the Market Portfolio with Discontinuous Returns*, The Review of Financial Studies, Vol. 3, No. 4, 493–521.
- PROTTER, P. (1990): *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin.

- SCHÄL, M. (1994): *On Quadratic Cost Criteria for Option Hedging*, Mathematics of Operations Research, Vol. 19, No. 1, 121–131.
- SCHWEIZER, M. (1988): *Hedging of Options in a General Semimartingale Model*, Dissertation ETH-Zürich, No. 8615.
- SCHWEIZER, M. (1991): *Option Hedging for Semimartingales*, Stochastic Processes and their Applications, Vol. 37, 339–363.
- SCHWEIZER, M. (1992): *Martingale Densities for General Asset Prices*, Journal of Mathematical Economics, Vol. 21, 363–378.
- SCHWEIZER, M. (1994a): *Approximating Random Variables by Stochastic Integrals*, Annals of Applied Probability, Vol. 22, 1536–1575.
- SCHWEIZER, M. (1994b): *On the Minimal Martingale Measure and the Föllmer-Schweizer Decomposition*, Stochastic Analysis and Applications 13, 573–599.
- SCHWEIZER, M. (1995a): *Variance-Optimal Hedging in Discrete Time*, Mathematics of Operations Research, Vol. 20, 1–32.
- SCHWEIZER, M. (1995b): *Approximation Pricing and Variance-Optimal Martingale Measures*, erscheint in Annals of Probability.
- TRAUTMANN, S./BEINERT, M. (1995): *Stock Price Jumps and their Impact on Option Valuation*, Arbeitspapier, Johannes-Gutenberg-Universität Mainz.

Dr. Axel F. A. Anas-Winter, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften, Universität
 Koblenz, Post D 142, 76473 Koblenz, e-mail: anas@uni-koblenz.de
 anas@uni-koblenz.de

Dem Herausgeber, Herrn Prof. Dr. Giorgio Fusco, werden die Herren Dr. Thomas
 Dipl.-Wirtsw. Matthias Klumpp und Dipl.-Wirtsw. Hans-Joachim
 Dr. Klumpp