

Finanztitelbewertung mit dem
Lower Partial Moment-Beta

Peter Reichling*

September 1997

* Johannes Gutenberg-Universität, Lehrstuhl für Finanzwirtschaft, D-55099 Mainz.
Telefon: +49 (0) 6131 39 3761, Fax +49 (0) 6131 39 3766,
E-Mail: Peter.Reichling@Uni-Mainz.DE.

Zusammenfassung

Das *Capital Asset Pricing-Modell* (CAPM) gilt zwar als Paradigma der Kapitalmarkttheorie, ist aber gleichzeitig substanzieller Kritik ausgesetzt. Manche Kritik basiert auf empirischen Studien, die gegenüber den theoretischen Werten zu flache *Wertpapierkennlinien* ergeben. Ein anderer Kritikpunkt betrifft die Testbarkeit des CAPM. So kann die Fehlspezifikation eines als Proxy für das *Marktportefeuille* verwendeten Index zu vermeintlichen Fehlbewertungen führen.

Dies legt nahe, ein Asset Pricing-Modell zu überprüfen, das einen *Downside*-orientierten Risikobegriff verwendet. *Lower Partial Moments* beurteilen das Ausfallrisiko, weil sie Verteilungen unterhalb einer vorgegebenen *Zielrendite* betrachten. Die ausfallorientierte Portfolio-Selektion ist unter wenig restriktiven Präferenzannahmen mit dem Bernoulli-Prinzip kompatibel.

Mit Hilfe der Effizienzlinien im Koordinatensystem aus erwarteter Rendite und Lower Partial Moment leiten Harlow und Rao (1989) eine Gleichung zur Finanztitelbewertung her, die sich vom CAPM nur im verwendeten Betakoeffizienten unterscheidet. Der empirischen Gehalt des ausfallorientierten Asset Pricing-Modells wird im Vergleich zum CAPM für den deutschen Aktienmarkt und den Zeitraum 1985–1994 überprüft.

1 Einführung

Das *Capital Asset Pricing-Modell* (CAPM) gilt als Paradigma der Kapitalmarkttheorie, ist aber gleichzeitig substantieller Kritik ausgesetzt. Manche Kritik basiert auf empirischen Studien, die gegenüber den theoretischen Werten zu flache *Wertpapierkennlinien* ergeben. Fama und French (1992) ermitteln, daß der *Betakoeffizient* nicht geeignet ist, den Querschnitt der mittleren Wertpapierrenditen zu erklären. Der Betakoeffizient ist demnach nicht preisbestimmend; stärkeren Einfluß besitzen mikroökonomische Faktoren wie die Unternehmensgröße oder das Verhältnis von Buch- zu Marktwert. Ein anderer Kritikpunkt betrifft die Testbarkeit des CAPM. Roll und Ross (1994) zeigen, daß die Fehlspezifikation eines als Proxy für das *Marktportefeuille* verwendeten Index im Umfang einiger Rendite-Basispunkte ausreichen kann, um keinen Zusammenhang zwischen den mittleren Renditen und den bezüglich des verwendeten Index berechneten Betakoeffizienten festzustellen.

Die Kritik am Standard-CAPM motiviert, ein Asset Pricing-Modell zu überprüfen, das statt der Volatilität einen *Downside*-orientierten Risikobegriff verwendet. *Lower Partial Moments* beurteilen das Ausfallrisiko, weil sie Verteilungen unterhalb einer vorgegebenen Zielrendite (*Target*) betrachten. Bawa (1975 und 1978) zeigt die Kompatibilität einer Anlageentscheidung aufgrund der erwarteten Rendite und des Lower Partial Moments mit dem Bernoulli-Prinzip. Hierbei reicht es für eine weite Klasse von Verteilungen aus, einen beliebigen Target zu betrachten, weil dann die Dominanz für diesen Target die Dominanz für alle Targets impliziert.

Bawa und Lindenberg (1977) leiten mit Hilfe der Effizienzlinien im Koordinatensystem aus erwarteter Rendite und Lower Partial Moment für einen Target in Höhe des risikolosen Zinssatzes eine Gleichung zur Finanztitelbewertung her, die sich vom CAPM nur im verwendeten Betakoeffizienten unterscheidet. Harlow und Rao (1989) verallgemeinern dieses Resultat für beliebige Targets.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, den empirischen Gehalt des ausfallorientierten Asset Pricing-Modells im Vergleich zum CAPM für den deutschen Aktienmarkt zu überprüfen. Der Aufsatz ist wie folgt aufgebaut: Abschnitt 2 stellt die ausfallorientierte Portfolio-Selektion dar. Abschnitt 3 behandelt das ausfallorientierte Asset Pricing-Modells. Abschnitt 4 vergleicht das Lower Partial Moment-Beta mit dem CAPM-Beta. Abschnitt 5 enthält die empirischen Ergebnisse für den Zeitraum 1985 bis 1994. Abschnitt 6 faßt die empirischen Resultate kurz zusammen.

2 Ausfallorientierte Portfolio-Selektion

Investitionsentscheidungen unter Unsicherheit kommen einer Entscheidung über Verteilungen der als Zufallsvariable modellierten Investitionsrückflüsse gleich. Investoren entscheiden sich insofern je nach Risikopräferenz für eine gewisse Verteilung. Risikopräferenzen oder gar Nutzenfunktionen können von Individuen in aller Regel aber nur vage formuliert werden. Deshalb sind Entscheidungsregeln hilfreich, die nur gewisse Eigenschaften der Nutzenfunktionen benötigen und keine bestimmte Verteilungsklasse voraussetzen, um zu einer Auswahl zu gelangen.

Hierzu können die Kriterien *stochastischer Dominanz* herangezogen werden, die Verteilungsfunktionen vergleichen. Die stochastischen Dominanzkriterien stehen in einem direkten Zusammenhang mit dem ausfallorientierten Risikobegriff, der Verteilungen unterhalb der Zielrendite τ beurteilt. Wir betrachten daher Ausfallmomente (*Lower Partial Moments*) und definieren das Lower Partial Moment der Ordnung n :

$$\text{LPM}_n(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - x)^n dF(x). \quad (1)$$

Im folgenden werden insbesondere die Lower Partial Moments der Ordnung 0 (*Ausfallwahrscheinlichkeit*), 1 (*Ausfallerwartung*) und 2 (*Ausfallvarianz*) eine Rolle spielen. Bawa (1975 und 1978) weist nach, daß die stochastischen Dominanzkriterien mit dem Bernoulli-Prinzip verträglich sind, wenn die Nutzenfunktion des Anlegers bestimmte Eigenschaften aufweist. Um diese Konsistenzbedingungen darzustellen, werden folgende Klassen von Nutzenfunktionen definiert:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &\equiv \{u(R) | u'(R) > 0 \ \forall R\}; \\ \mathcal{U}_2 &\equiv \{u(R) | u'(R) > 0 \text{ und } u'' < 0 \ \forall R\}; \\ \mathcal{U}_3 &\equiv \{u(R) | u'(R) > 0, \ u''(R) < 0 \text{ und } u'''(R) > 0 \ \forall R\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Die Klasse \mathcal{U}_1 umfaßt alle Nutzenfunktion mit positivem Grenznutzen, der lediglich besagt, daß ein höherer Rückfluß einem niedrigerem Rückfluß vorgezogen wird. Die Klasse \mathcal{U}_2 enthält die Nutzenfunktionen mit positivem, fallendem Grenznutzen, der Risikoaversion widerspiegelt. Die Klasse \mathcal{U}_3 umfaßt nur die Nutzenfunktionen mit zusätzlich positiver dritter Ableitung. Bawa (1975) zeigt für die Klassen die Verbindungen zur Erwartungsnutzenmaximierung für die Verteilungen F und G , wobei die Präferenz nach dem Bernoulli-Prinzip durch \succ symbolisiert wird:

Satz 1 (Stochastische Dominanz und Bernoulli-Prinzip)

- 1) Für alle $u(R) \in \mathcal{U}_1$ gilt: F domiert G stochastisch erster Ordnung $\Leftrightarrow F \succ G$.
- 2) Für alle $u(R) \in \mathcal{U}_2$ gilt: F domiert G stochastisch zweiter Ordnung $\Leftrightarrow F \succ G$.
- 3) Für alle $u(R) \in \mathcal{U}_3$ gilt: F domiert G stochastisch dritter Ordnung und $E(R_F) \geq E(R_G) \Leftrightarrow F \succ G$.

Mit den Klassen für die Nutzenfunktion liegen dabei Bedingung für die Konsistenz einer Investitionsentscheidung nach den Kriterien stochastischer Dominanz und der Erwartungsnutzenmaximierung vor. Kaduff (1996, 184–190) überträgt diesen Satz auf die Ausfallmomente:

Satz 2 (Lower Partial Moments und Bernoulli-Prinzip)

- 1) Für alle $u(R) \in \mathcal{U}_1$ gilt: $F \succ G \Leftrightarrow \text{LPM}_{F,0}(\tau) \leq \text{LPM}_{G,0}(\tau) \forall \tau$, wobei die Ungleichung für mindestens ein τ strikt erfüllt ist.
- 2) Für alle $u(R) \in \mathcal{U}_2$ gilt: $F \succ G \Leftrightarrow \text{LPM}_{F,1}(\tau) \leq \text{LPM}_{G,1}(\tau) \forall \tau$, wobei die Ungleichung für mindestens ein τ strikt erfüllt ist.
- 3) Für alle $u(R) \in \mathcal{U}_3$ gilt: $F \succ G \Leftrightarrow \text{LPM}_{F,2}(\tau) \leq \text{LPM}_{G,2}(\tau) \forall \tau$, wobei die Ungleichung für mindestens ein τ strikt erfüllt ist, und $E(R_F) \geq E(R_G)$.

Zur Bestimmung ausfalleffizienter Portefeuilles betrachten wir Portefeuilles aus m Wertpapieren, $i = 1, \dots, m$, mit den jeweiligen wertmäßigen Anteilen x_i . Das Optimierungsproblem

$$\text{LPM}_{n,\tau}(R_P) \rightarrow \min \quad \text{mit} \quad R_P = \sum_{i=1}^m x_i \cdot R_i, \quad (3)$$

$$\text{wobei} \quad E(R_P) = E(\bar{R}) \geq E(R_{\text{Minimum LPM}_{n,\tau}})$$

$$\text{und} \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1$$

weist als Zielfunktion die Minimierung des Lower Partial Moments der Ordnung n auf. Die Minimierung erfolgt bei vorgegebener erwarteter Portefeuillerendite, wobei Positionen auf dem unteren, domierten Ast der Ausfalleffizienzlinie ausgeschlossen werden. Darüberhinaus müssen die wertmäßigen Portefeuilleanteile in der Summe 100 % betragen.

Die Lösungsmenge des Optimierungsproblems (3) für einen Target τ besteht bei variierender erwarteter Portefeullerendite aus Anteilsvektoren $\mathbf{x} \equiv (x_1, \dots, x_m)^T$ und sei mit $\mathcal{LPM}_n(\tau)$ bezeichnet. Bawa (1978) zeigt, daß diese Mengen für $n \geq 1$ konvex in \mathbf{x} sind. Die Vereinigungsmenge aller Lösungsmengen bei unterschiedlichem Target

$$\mathcal{LPM}_n \equiv \bigcup_{\tau} \mathcal{LPM}_n(\tau)$$

ist Teil der Menge derjenigen Portefeulles, die im Sinne der zugehörigen stochastischen Dominanz nicht dominiert werden. Wird die Menge stochastisch nicht dominierter Portefeulles mit

$$\mathcal{SD}_n \equiv \left\{ \mathbf{x} \mid \nexists \mathbf{y} \text{ mit } E(u(R(\mathbf{y}))) \geq E(u(R(\mathbf{x}))) \quad \forall u(R) \in \mathcal{U}_n \right\}$$

bezeichnet, gilt:

$$\mathcal{LPM}_{n-1} \subseteq \mathcal{SD}_n \quad \text{für } n = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Damit ist die Bestimmung effizienter Portefeulles im Koordinatensystem aus erwarteter Rendite und Lower Partial Moment bezüglich eines Targets notwendig für die Erwartungsnutzenmaximierung des Anlegers. Die Eigenschaften seiner Nutzenfunktion bestimmen dabei die Ordnung des verwendeten Lower Partial Moments. Dies ist bedeutsam, weil die Erwartungswert-Varianz-Dominanz i. a. weder eine notwendige noch hinreichende Bedingung für die stochastische Dominanz darstellt.

Es ist zunächst nicht hinreichend, lediglich einen Target zu betrachten. Hierzu müßte aus der stochastischen Dominanz bei Verwendung eines gewählten Target die stochastische Dominanz für alle anderen Targets folgen. Dies wird jedoch erreicht, indem man die möglichen Verteilungen auf die Klasse derjenigen Verteilungen beschränkt, die höchstens einen echten Schnittpunkt aufweisen:

Satz 4 (($\mu, \text{LPM}_{n,\tau}$)-Effizienz)

Bei beliebigen Verteilungen F und G , die höchstens einen echten Schnittpunkt aufweisen, gelte $E(R_F) \geq E(R_G)$ und $\text{LPM}_{n,F}(\tau_0) < \text{LPM}_{n,G}(\tau_0)$ für einen Target τ_0 mit $n = 1, 2$. Dann gilt für alle $\tau \in \mathbb{R}$: $\text{LPM}_{n,F}(\tau) < \text{LPM}_{n,G}(\tau)$.

BEWEIS: s. Anhang.

Damit bestätigt sich die von Bawa (1975 und 1978) formulierte, aber unbewiesen gebliebene Vermutung, daß die Betrachtung nur eines Target zur ausfallorientierten Portfolio-Selektion ausreicht, für alle Verteilungen, die höchstens einen echten Schnittpunkt aufweisen. Es ist klar, daß diese Beziehung nicht für die Ausfallwahrscheinlichkeit gilt, denn ein Schnittpunkt der Verteilungsfunktionen widerspricht der stochastischen Dominanz erster Ordnung.

Beträgt die Ordnung des Lower Partial Moments mindestens eins, ist das betreffende Lower Partial Moment eine konvexe Funktion der wertmäßigen Portefeuilleanteile. Die Minimierung dieser konvexen Funktion über einer konvexen Menge führt dazu, daß die zugehörigen $(\mu, \text{LPM}_{n,\tau})$ -Effizienzlinien eine ähnliche Gestalt aufweisen wie die (μ, σ) -Effizienzlinie. Für Kombinationen von unsicheren Finanztiteln mit einer sicheren Anlage gilt dies nicht mehr.

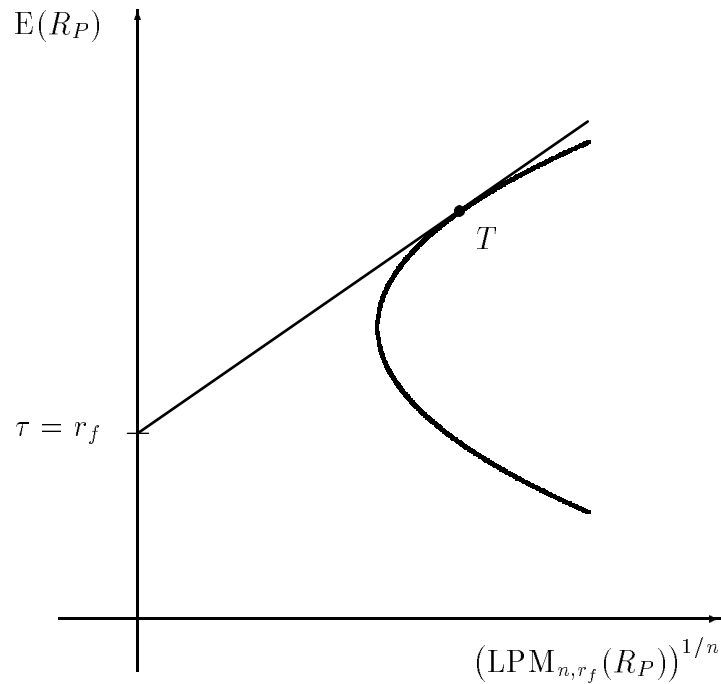
In der traditionellen Portfolio-Selektion mißt man das Risiko mit der Volatilität. Dann weist die sichere Anlage weder ein Risiko noch Kovarianzen mit riskanten Titeln auf. Erfasst man das Risiko hingegen mit Hilfe der Ausfallmomente, kann die sichere Anlage durchaus ein Risiko aufweisen. Letzteres ist der Fall, wenn die Zielrendite über dem sicheren Zinssatz liegt.

Bawa und Lindenberg (1977) betrachten einen Target τ in Höhe des sicheren Zinssatzes r_f . Für Portefeuilles, die das Tangentialportefeuille T mit der sicheren Anlage kombinieren, $R_P = x \cdot R_T + (1 - x) \cdot r_f$, gilt:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\text{LPM}_{n,r_f}(R_P)} &= \left(\int_{-\infty}^{r_f} \underbrace{(R_P - r_f)}_{x \cdot (R_T - r_f)}^n dF \right)^{1/n} \quad \text{mit } n > 0 \quad (5) \\ &= x \cdot \sqrt[n]{\text{LPM}_{n,r_f}(R_T)}. \end{aligned}$$

Stellen die Ausfallerwartung oder die Ausfallvarianz das relevante Risikomaß dar und wird eine Zielrendite in Höhe des sicheren Zinssatzes gefordert, bilden Kombinationen der sicheren Anlage mit dem Tangentialportefeuille die effizienten Portefeuilles. Diese Portefeuilles lassen sich auf einer Geraden positionieren, wenn das Ausfallrisiko in der gleichen Dimension gemessen wird wie die erwartete Rendite wird, d. h. wenn bei einem Lower Partial Moment der Ordnung n die n -te Wurzel gezogen wird. Diesen Sachverhalt veranschaulicht Abbildung 1.

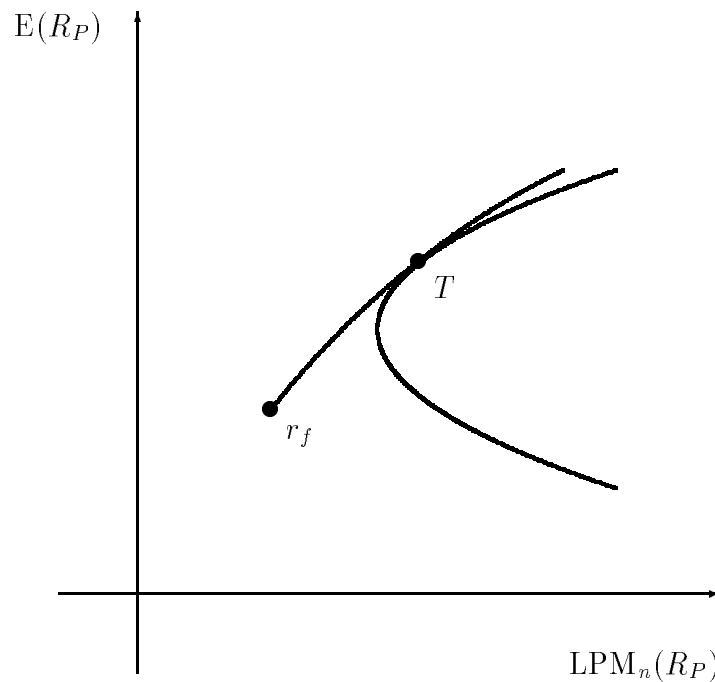
Abbildung 1: $(\mu, \text{LPM}_{n,\tau})$ -Effizienzlinie für $\tau = r_f$



Liegt der Target über dem sicheren Zinssatz, weist die sichere Anlage ein Ausfallrisiko auf. Außerdem besitzt die sichere Anlage ein Diversifikationspotential, wenn die Ausfallvarianz das Risiko mißt. Bei Verwendung der Ausfallerwartung ist die Effizienzlinie zwar auch für beliebige Targets eine Gerade. Dagegen liegen $(\mu, \text{LPM}_{2,\tau})$ -effiziente Portefeuilles auf einer gekrümmten Linie, wenn der Target vom sicheren Zinssatz abweicht.

Harlow und Rao (1989) zeigen die Konvexität von Lower Partial Moments $\text{LPM}_{n,\tau}(E(R_P))$ in Abhängigkeit von der erwarteten Portefeuillerendite für $n \geq 1$. Im Diagramm aus erwarteter Rendite und Ausfallvarianz resultiert aus der Berücksichtigung sicherer Bestandteile im Portefeuille daher eine konkave Linie. Daher besitzt die risikolose Anlage bezüglich der Ausfallvarianz einen Diversifikationseffekt, den Abbildung 2 veranschaulicht.

Abbildung 2: $(\mu, \text{LPM}_{n,\tau})$ -Effizienzlinie für $\tau \neq r_f$



3 Ausfallorientiertes Asset Pricing-Modell

Die $(\mu, \text{LPM}_{n,\tau})$ -Effizienzlinien stellt für $n \geq 1$ wachsende konkave Funktionen des jeweiligen Lower Partial Moments dar. Am vollkommenen, friktionslosen Kapitalmarkt existiere eine sichere Anlageform. Weiter sei das Tangentialportefeuille, das durch Kombination der sicheren Anlage mit den unsicheren Portefeuilles entsteht, eindeutig. Zudem besitzen die risikoaversen Anleger homogene Erwartungen, und es gelte die *Tobin-Separation*, so daß im Markträumungs-Gleichgewicht das Tangentialportefeuille mit dem Marktportefeuille übereinstimmt.

Harlow und Rao (1989) leiten unter diesen Voraussetzungen die nachstehende Bewertungsgleichung ab, die eine lineare Beziehung zwischen der erwarteten Rendite eines Wertpapiers und dem Betakoeffizienten darstellt. Im Unterschied zum CAPM ist der Betakoeffizient bezüglich der Lower Partial Moments definiert:

$$\begin{aligned}
E(R_j) &= r_f + \beta_j^{\text{LPM}_{n,\tau}} \cdot (E(R_M) - r_f) & (6) \\
\text{mit } \beta_j^{\text{LPM}_{n,\tau}} &\equiv \frac{\int_{-\infty}^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} (\tau - R_M)^{n-1} \cdot (r_f - R_j) dF(R_j, R_M)}{\int_{-\infty}^{\tau} (\tau - R_M)^{n-1} (r_f - R_M) dF(R_M)} \\
&\equiv \frac{\text{GCLPM}_{n,\tau}(R_j, R_M)}{\text{GLPM}_{n,\tau}(R_M)}.
\end{aligned}$$

Die Tobin-Separation ist wie für das CAPM von besonderer Bedeutung für das ausfallorientierte Asset Pricing-Modell. Ross (1978) zeigt, daß die Tobin-Separation ohne spezielle Präferenzannahmen gilt, wenn die betrachteten Zufallrenditen eine lineare Struktur aufweisen. Meyer (1987) definiert nun die *Location-Scale-Verteilungsklasse* wie folgt: Zwei Verteilungsfunktionen F und G unterscheiden sich nur durch den Lageparameter l und den Skalierungsparameter s , wenn $F(x) = G(l + s \cdot x)$ mit $s > 0$ gilt. Damit gehören die Location-Scale-Verteilungen zur Klasse derjenigen Verteilungen, die die Tobin-Separation gestatten.

Zwar entspricht die $(\mu, \text{LPM}_{n,\tau})$ -Analyse nicht direkt einer Analyse aufgrund der erwarteten Rendite und des Skalierungsparameters, weil das Lower Partial Moment nicht dem Skalierungsparameter entsprechen muß. Dennoch existiert für Location-Scale-Verteilungen eine eindeutige Beziehung zwischen dem Skalierungsparameter und dem Lower Partial Moment erster bzw. zweiter Ordnung. Wir können daher wie folgt zusammenfassen:

- 1) Stammen die Verteilungen der Porteuillerenditen aus der Location-Scale-Klasse, gilt für die $(\mu, \text{LPM}_{n,\tau})$ -Portfolio-Selektion mit $n = 1, 2$ die Tobin-Separation. Damit folgt für Lower Partial Moments erster bzw. zweiter Ordnung die ausfallorientierte Bewertungsregel (6).
- 2) Existieren Erwartungswert und Volatilität der Portefeullerenditen, sind für Locations-Scale-Verteilungen keine Unterschiede zum Standard-CAPM zu erwarten. Meyer (1987) zeigt nämlich, daß sich dann der Erwartungsnutzen eines Anlegers auch in Abhängigkeit von Erwartungswert und Volatilität der Portefeullerrendite ausdrücken läßt.

Ein Spezialfall des ausfallorientierten Asset Pricing-Modells resultiert, wenn als Target der sicherer Zinssatz verwendet wird. Dies führt auf das Modell von Bawa und Lindenberg (1977). Es besitzt die aus der (μ, σ) -Portfolio-Selektion vertraute Eigenschaft, daß die Effizienzlinie unter Berücksichtigung der sicheren Anlagemöglichkeit im $(\mu, \sqrt{\text{LPM}_{n,r_f}})$ -Koordinatensystem eine Gerade darstellt:¹

$$E(R_j) = r_f + \beta_j^{\text{LPM}_{n,r_f}} \cdot (E(R_j - r_f)) \quad (7)$$

$$\text{mit } \beta_j^{\text{LPM}_{n,r_f}} = \frac{\int_{-\infty}^{r_f} \int_{-\infty}^{\infty} (r_f - R_M)^{n-1} \cdot (r_f - R_j) dF(R_j, R_M)}{\int_{-\infty}^{r_f} (r_f - R_M)^n dF(R_M)}.$$

Im Unterschied zum verallgemeinerten Lower Partial Moment $\text{GLPM}_{n,\tau}$ von Harlow und Rao (1989) entspricht hier der Nenner des Betakoeffizienten dem Lower Partial Moment LPM_{n,r_f} . Dieser Umstand ist jedoch nur darauf zurückzuführen, daß mit dem sicheren Zinssatz ein spezieller Target gewählt wurde. Bezüglich des Zählers des Betakoeffizienten spricht man in diesem Fall auch schlicht vom Co-Lower Partial Moment CLPM_{n,r_f} .

4 CAPM- versus Lower Partial Moment-Beta

Zwischen CAPM-Beta und Lower Partial Moment-Beta besteht eine Beziehung. Bawa und Lindenberg (1977) sowie Nantell und Price (1979) zeigen die Übereinstimmung beider Betakoeffizienten für normalverteilte Portefeullerenditen, falls der Target in Höhe des sicheren Zinssatzes gewählt wird.

Chow und Denning (1994) betonen, daß es für einen Vergleich des CAPM-Betas mit dem Lower Partial Moment-Beta notwendig ist, die verallgemeinerten (Co-) Lower

¹Die ausfallorientierte Wertpapierkennlinie wurde für den Fall $n = 2$ bereits von Hogan und Warren (1974) hergeleitet. Porter, Bey und Lewis (1975) übertragen den Ansatz auf die Bewertung von Realinvestitionen. Jahankhani (1976) überprüft das Modell für den US-amerikanischen Aktienmarkt. Arzac und Bawa (1977) verwenden einen verallgemeinerten Safety-first-Ansatz im Sinne des Telser-Kriteriums zur Gleichgewichtsbewertung, der die höhere Ausfallwahrscheinlichkeit bei Verletzung der Restriktion berücksichtigt. Lee und Rao (1988) leiten die Bewertungsregel für die (Co-) Semivarianz her.

Partial Moments zu betrachten, wenn als Target nicht der sichere Zinssatz verwendet wird. Homaifar und Graddy (1990) kommen zu dem Ergebnis systematischer Unterschiede, indem sie in der Bewertungsgleichung (7) von Bawa und Lindenberg (1977) den sicheren Zinssatz durch einen beliebigen Target ersetzen. Dies führt zu folgendem Fehlschluß:

$$\begin{aligned}\beta_j^{\text{LPM}_{2,\tau}} &= \frac{\text{CLPM}_{2,\tau}(R_j, R_M)}{\text{LPM}_{2,\tau}(R_M)} \\ &= \beta_j^{\text{CAPM}} + (1 - \beta_j^{\text{CAPM}}) \cdot (r_f - \tau) \cdot \frac{\overbrace{\text{E}(\min\{0, R_M - \tau\})}^{\leq 0}}{\underbrace{\text{LPM}_{2,\tau}(R_M)}_{> 0}}.\end{aligned}\tag{8}$$

Danach können die systematischen Verzerrungen des $\text{LPM}_{2,\tau}$ -Beta gegenüber dem CAPM-Beta benannt werden, wenn man die Fälle eines über- oder unterdurchschnittlichen CAPM-Betas sowie eines über oder unter dem sicheren Zinssatz liegenden Targets unterscheidet. Es ist leicht zu erkennen, daß das $\text{LPM}_{2,\tau}$ -Beta mit dem CAPM-Beta übereinstimmt, wenn der Target in Höhe des sicheren Zinssatzes gewählt wird. Tatsächlich gilt die Herleitung von Homaifar und Graddy (1990) auch nur für diesen Fall; sonst hätten die verallgemeinerten (Co-) Lower Partial Moments betrachtet werden müssen.

Price, Price und Nantell (1982) untersuchen den Fall lognormalverteilter Renditen. Mit dieser Verteilungsannahme werden zwar negative Renditen ausgeschlossen, obwohl sie regelmäßig am Kapitalmarkt für risikobehaftete Finanztitel beobachtet werden können. Statt der Renditen können aber diskrete Verzinsungsfaktoren $(1 + R_{\text{diskret}})$ verwendet werden, die definitionsgemäß nicht negativ werden können. Price, Price und Nantell (1982) ermitteln für lognormalverteilte Renditen folgende Beziehung zwischen CAPM-Beta und Lower Partial Moment-Beta:

- 1) CAPM-Beta und LPM_{2,r_f} -Beta stimmen genau dann überein, wenn die Rendite des betreffenden Finanztitels sicher ist oder sein Betakoeffizient dem wertgewichteten durchschnittlichen Beta entspricht. In letzterem Fall handelt es sich um das Beta des Marktportefeuilles; es beträgt folglich eins:

$$\beta_j^{\text{CAPM}} = \beta_j^{\text{LPM}_{2,r_f}} \Leftrightarrow \beta_j^{\text{CAPM}} = 1 \quad \text{oder} \quad R_j = r_f.\tag{9}$$

- 2) Das CAPM-Beta von Wertpapieren, die nach dem CAPM als defensiv eingestuft werden, ist kleiner als das LPM_{2,r_f} -Beta, während das CAPM-Beta für aggressive Titel über dem LPM_{2,r_f} -Beta liegt:

$$\beta_j^{\text{CAPM}} \begin{cases} < \\ > \end{cases} 1 \Rightarrow \beta_j^{\text{CAPM}} \begin{cases} < \\ > \end{cases} \beta_j^{\text{LPM}_{2,r_f}}. \quad (10)$$

Obwohl sich aus der Annahme lognormalverteilter Renditen Unterschiede zwischen den Betakoeffizienten beider Modelle ergeben, wird diese Differenz für die Gleichgewichtsbewertung erst bedeutsam, wenn nicht mit der Verteilungsannahme andere Voraussetzungen verletzt sind. So war zur Herleitung der Bewertungsregel die Tobin-Separation notwendig.

Chow und Denning (1994) weisen darauf hin, daß lognormalverteilte Renditen keine Tobin-Separation gestatten. Ross (1978) formuliert folgende Bedingung für die 2-Fund-Separation: Die Renditen R_i risikobehafteter Titel i müssen sich mit zwei Zufallsvariablen Y und Z durch $R_i = Y + b_i \cdot Z + \epsilon_i$ beschreiben lassen, wobei Y im Falle der Existenz einer sicheren Anlage ihrem Zinssatz entspricht. Normalverteilte Renditen erfüllen diese Bedingung. Wenn aber die Renditen R_i lognormalverteilt sind, gilt $R_i = \exp\{Y + b_i \cdot Z + \epsilon_i\}$. Damit ist offenbar die Linearitätsbedingung für die 2-Fund-Separation bzw. die Tobin-Separation verletzt. Lognormalverteilte Renditen widersprechen sowohl der linearen Bewertungsregel nach dem CAPM als auch dem ausfallorientierten Asset Pricing-Modell.

Die von Homaifar und Graddy (1990) sowie von Price, Price und Nantell (1982) vorgetragene systematische Unterschiede zwischen CAPM-Beta und Lower Partial Moment-Beta sind für die Gleichgewichtsbewertung unbedeutsam, weil im ersten Fall für beliebige Target fälschlicherweise nicht die verallgemeinerten (Co-) Lower Partial Moments verwendet wurden und im zweiten Fall die Annahme lognormalverteilter Renditen der Tobin-Separation widerspricht.

Chow und Denning (1994) zeigen vielmehr: Einerseits ist unter dem Standard-Marktmodell das $LPM_{2,\tau}$ -Beta unabhängig vom verwendeten Target ein unverzerrter Schätzer für das CAPM-Beta. Andererseits ist mit dem Lower Partial Moment-Marktmodell als Renditegenerierungsprozeß das CAPM-Beta ein unverzerrter Schätzer für das $LPM_{2,\tau}$ -Beta bei beliebigem Target.

5 Empirische Resultate

Die theoretischen Ergebnisse lassen zwei Hypothesen zu, die im folgenden für den deutschen Aktienmarkt empirisch überprüft werden sollen:

- 1) CAPM und ausfallorientiertes Asset Pricing-Modell (*LPM-Modell*) führen zu gleichen erwarteten Renditen einzelner Wertpapiere; genauer: Beide Modelle liefern dieselben Betakoeffizienten einzelner Wertpapiere, und daher stimmen die Wertpapierkennlinien überein.
- 2) Die lineare Bewertung des LPM-Modells gilt unabhängig vom gewählten Target; die ausfallorientierten Betakoeffizienten sind bei verschiedenen Targets also gleich.

Die zugrundeliegende Datenbasis umfaßt die monatlichen bereinigten Schlußkurse aller an der Frankfurter Wertpapierbörse im amtlichen Handel notierten Aktien für den Zeitraum von 1985 bis 1994. Die Untersuchung umfaßt nur Aktien mit einer vollständigen Kursreihe; Wertpapiere mit fehlenden Daten bleiben unberücksichtigt. So verbleiben die Kursreihen von 154 Aktien. Als Proxy für das Marktportefeuille dient der DAFOX. Die sichere Anlage wird mit dem 1-Monats-Fibor gleichgesetzt.²

CAPM und LPM-Modell stellen Ex ante-Versionen für die erwartete Rendite einzelner Wertpapiere dar, die einer empirischen Überprüfung nicht unmittelbar zugänglich sind. Stattdessen werden nachstehende Ex post-Formulierungen verwendet, wobei im folgenden nur das LPM-Modell mit verallgemeinerten (Co-) Lower Partial Moments der Ordnung 2 überprüft wird:

$$r_{it} = \alpha_i + \beta_i^{\text{CAPM}} \cdot r_{Mt} + \epsilon_{it} \quad \text{bzw.} \quad r_{it} = \alpha_i + \beta_i^{\text{LPM}_{2,\tau}} \cdot r_{Mt} + \epsilon_{it}, \quad (11)$$

wobei $r_{it} \equiv R_{it} - r_{ft}$ und $r_{Mt} \equiv R_{Mt} - r_{ft}$ realisierte Überrenditen des einzelnen Wertpapiers i bzw. des Marktportefeuilles M bezeichnen und t den Zeitindex angibt. Da der untersuchte 10-Jahres-Zeitraum 120 Monatschlußkurse umfaßt, liefern die Kurse für jede Aktie 119 Renditen. Die Aktienrenditen ergeben sich als Differenzen logarithmierter Kurse; es handelt sich um stetige Renditen. Der sichere diskrete Zinssatz wird deshalb entsprechend umgerechnet: $r_f = \ln(1 + r_{\text{diskret}})$.

Der Test des CAPM und des $\text{LPM}_{2,\tau}$ -Modells vollzieht sich in zwei Schritten:

²Alle Aktienkurse sowie die DAFOX-Kursreihe entstammen der Karlsruher Kapitalmarktdatenbank. Die Fiborsätze wurden den Monatsberichten der Deutschen Bundesbank entnommen.

- 1) In der Zeitreihenanalyse wird zunächst der Betakoeffizient geschätzt. Der Schätzer berechnet sich beim CAPM wie folgt:

$$\hat{\beta}_i^{\text{CAPM}} = \frac{\sum_{t=1}^{119} (R_{it} - \hat{R}_i) \cdot (R_{Mt} - \hat{R}_M)}{\sum_{t=1}^{119} (R_{Mt} - \hat{R}_M)^2}, \quad (12)$$

wobei \hat{R}_i bzw. \hat{R}_M die mittlere Rendite der einzelnen Aktie bzw. des verwendeten Marktindex angeben.

Der Schätzer für den Betakoeffizienten beim $\text{LPM}_{2,\tau}$ -Modell lautet:

$$\hat{\beta}_i^{\text{LPM}_{2,\tau}} = \frac{\sum_{t=1}^{119} (R_{it} - r_{ft}) \cdot \min\{0, R_{Mt} - \tau\}}{\sum_{t=1}^{119} (R_{Mt} - r_{ft}) \cdot \min\{0, R_{Mt} - \tau\}} = \frac{\sum_{t=1}^{119} r_{it} \cdot \min\{0, R_{Mt} - \tau\}}{\sum_{t=1}^{119} r_{Mt} \cdot \min\{0, R_{Mt} - \tau\}}. \quad (13)$$

- 2) Der eigentliche Test beider Bewertungsmodelle erfolgt durch die anschließende Querschnittsanalyse:

$$\hat{r}_i = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot \hat{\beta}_i^{\text{CAPM}} \quad \text{bzw.} \quad \hat{r}_i = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot \hat{\beta}_i^{\text{LPM}_{2,\tau}}. \quad (14)$$

Bei Gültigkeit des jeweiligen Bewertungsmodells genügen die Schätzer $\hat{\gamma}_0$ bzw. $\hat{\gamma}_1$ den Hypothesen $\gamma_0 = 0$ bzw. $\gamma_1 = \hat{r}_M$. Bei der Hypothese, daß der Steigungskoeffizient der Überrendite des Marktindex entspricht, gibt man sich häufig auch schon zufrieden, wenn dieser Koeffizient signifikant positiv ist, weil dann der Kapitalmarkt für systematische Risiken eine Prämie vergütet.

In der Querschnittsanalyse muß anstelle des wahren Betakoeffizienten der Schätzer aus der Zeitreihenanalyse verwendet werden: ein Fehler in der Variablen. Die Gruppierung der Wertpapiere zu Portefeuilles durch Klassen von Betakoeffizienten reduziert diesen Fehler.

Tabelle 1 enthält die Ergebnisse der Querschnittsregressionen sowohl für das CAPM als auch für $\text{LPM}_{2,\tau}$ -Modelle mit verschiedenen Targets:

- 1) Als Target dient zunächst der risikolosen Zinssatz. Dieser Target liegt für Anleger nahe, die am Kapitalmarkt für übernommene Risiken eine Prämie erwarten. Um mögliche Verzerrungen aus den Schwankungen des risikolosen Zinssatzes zu vermeiden, wird die Zielrendite für jeden Monat mit dem jeweiligen 1-Monats-Fibor gleichgesetzt: $\tau = \tau_t = r_{ft}$.

- 2) Im zweiten Fall dient die Indexrendite als Target. Diese Zielrendite kommt für Anleger in Betracht, die mindestens die wertgewichtete Durchschnittsrendite aller Marktteilnehmer erzielen wollen. Hierbei ist es nicht sinnvoll, die pro Periode erzielte Indexrendite zu verwenden, weil sonst der zugehörige Betakoeffizient nicht definiert ist. Deshalb wird die mittlere Indexrendite herangezogen.
- 3) Schließlich dient null als Target. Anleger mit dieser Zielrendite wollen möglichst keine Verluste erleiden.

Tabelle 1 enthält auch die Resultate für Portefeuilles, die nach Betakoeffizienten in Fünfer- und Zehner-Gruppen zusammengefaßt wurden. Hierzu werden die Wertpapiere zunächst nach Betakoeffizienten sortiert. Anschließend werden beginnend mit dem kleinsten Beta je nach Anzahl gleichgewichtete Portefeuilles aus fünf oder zehn Wertpapieren gebildet. Die letzte Gruppe mit dem höchsten Betakoeffizienten enthält, weil 154 Wertpapiere betrachtet werden, nur vier Titel.

Tabelle 1: **Empirischer Vergleich von CAPM und LPM_{2, τ} -Modell**

Modell	γ_0	γ_1	R ²
Einzelbetas			
CAPM	5,25 % ^{***}	-3,78 % ^{**}	3,88 %
LPM _{2,r_f}	7,68 % ^{***}	-6,61 % ^{***}	13,19 %
LPM _{2,R_M}	7,67 % ^{***}	-6,62 % ^{***}	13,28 %
LPM _{2,0}	7,60 % ^{***}	-6,52 % ^{***}	12,80 %
Fünfer-Gruppen			
CAPM	5,18 % ^{***}	-3,69 % ^{**}	13,15 %
LPM _{2,r_f}	7,59 % ^{***}	-6,50 % ^{***}	39,41 %
LPM _{2,R_M}	7,49 % ^{***}	-6,40 % ^{***}	44,00 %
LPM _{2,0}	7,48 % ^{***}	-6,38 % ^{***}	43,18 %
Zehner-Gruppen			
CAPM	5,05 % ^{***}	-3,50 % [*]	24,05 %
LPM _{2,r_f}	8,04 % ^{***}	-7,18 % ^{***}	59,02 %
LPM _{2,R_M}	7,65 % ^{***}	-6,65 % ^{***}	63,21 %
LPM _{2,0}	7,94 % ^{***}	-7,14 % ^{***}	58,29 %

- * Signifikanz auf dem 10 %-Niveau
- ** Signifikanz auf dem 5 %-Niveau
- *** Signifikanz auf dem 1 %-Niveau

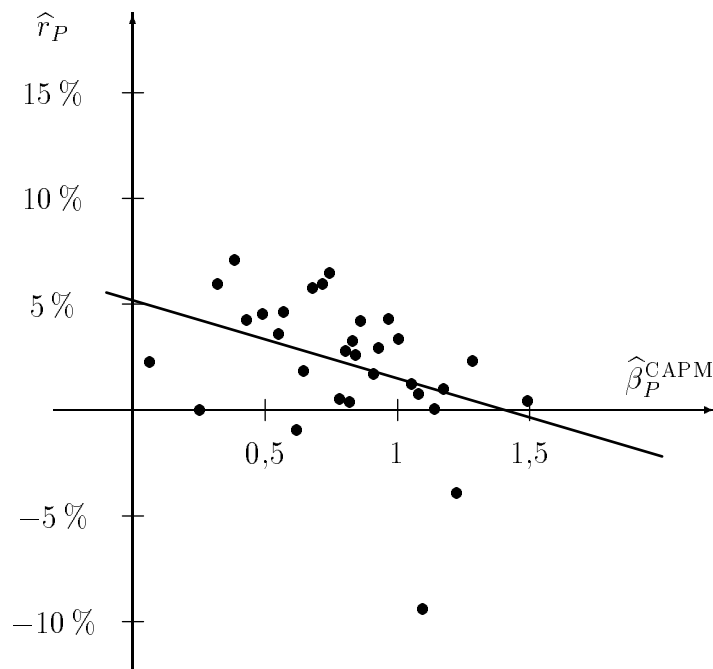
Die Querschnittsregressionen liefern ein einheitliches Bild: Die Hypothese, der Absolutterm betrage null, muß durchweg abgelehnt werden. Alle Regressionsgeraden

weisen positive Ordinatenabschnitte auf, die signifikant von null verschieden sind. Ähnliches gilt für die Steigung. Alle geschätzten Wertpapierkennlinien besitzen eine negative Steigung, jedoch mit Unterschieden im Signifikanzniveau zwischen CAPM und $LPM_{2,\tau}$ -Modellen. Die $LPM_{2,\tau}$ -Regressionsgeraden sind steiler und weisen entsprechend einen höheren Renditeachsenabschnitt auf. Vor diesem Hintergrund muß der empirische Gehalt beider Modelle in Frage gestellt werden.

Der betrachtete 10-Jahres-Zeitraum gilt jedoch i. a. als zu kurz, um zu einer endgültigen Falsifikation der betrachteten Modelle zu gelangen. Deshalb erscheint es wichtig zu überprüfen, in welchem Ausmaß die Modelle in der Lage sind, den Querschnitt der Wertpapierrenditen zu erklären. Das Bestimmtheitsmaß zeigt, daß die mittleren Renditen mit Hilfe der $LPM_{2,\tau}$ -Modelle besser erklärt werden als mit dem CAPM.

Die Abbildungen 3 und 4 veranschaulichen die Positionierung von Fünfer-Portefeuilles hinsichtlich der mittleren Rendite und des Betakoeffizienten. Hierbei ist zu beachten, daß die Gruppierungen je nach verwendetem Modell unterschiedlich ausfallen können, weil die Betakoeffizienten verschieden sind.

Abbildung 3: **Geschätzte CAPM-Wertpapierkennlinie**



Die zweite eingangs dieses Abschnitts formulierte Hypothese betrifft die Unterschiede zwischen den Betakoeffizienten des jeweiligen Wertpapiers. Die Werte aus

Abbildung 4: Geschätzte LPM_{2,r_f} -Wertpapierkennlinie

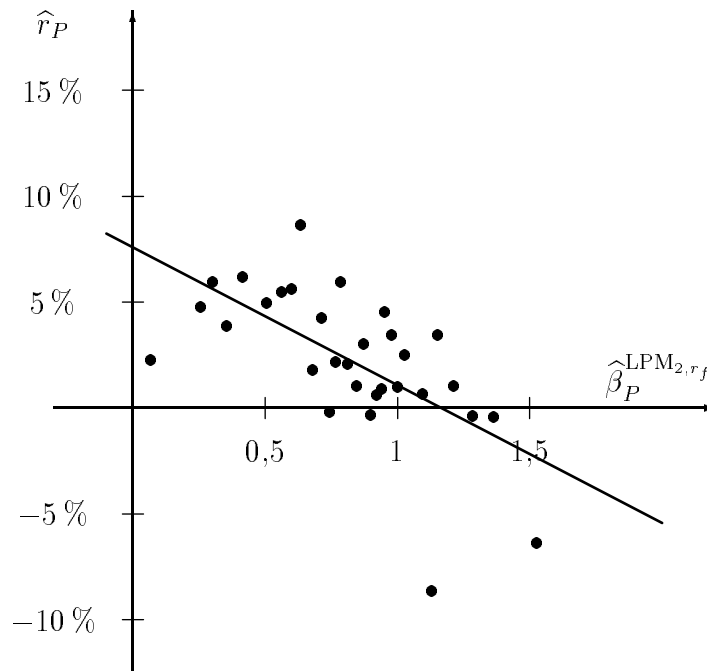


Tabelle 2 zeigen für die einzelnen Wertpapiere folgendes Ergebnis: Die Differenzen zwischen CAPM-Beta und $LPM_{2,\tau}$ -Beta sind im Mittel um den Faktor zehn größer als zwischen verschiedenen $LPM_{2,\tau}$ -Betas.

Um systematische Unterschiede zwischen den Betakoeffizienten der verschiedenen Modelle feststellen zu können, betrachten wir die Differenz $y_i \equiv \hat{\beta}_i^{\text{CAPM}} - \hat{\beta}_i^{\text{LPM}_{2,\tau}}$. Signifikanzaussagen sind dann mit Hilfe des t-Wertes $\hat{y}/\hat{\sigma}_y$ möglich.³

Das LPM_{2,r_f} -Beta ist im Mittel kleiner als das CAPM-Beta. Auch innerhalb der $LPM_{2,\tau}$ -Modelle ergeben sich je nach gewähltem Target Unterschiede, die jedoch betraglich deutlich geringer ausfallen. Das LPM_{2,R_M} -Beta fällt durchschnittlich kleiner aus als das LPM_{2,r_f} -Beta und das $LPM_{2,0}$ -Beta. Zwischen den beiden letzteren Betas besteht kein signifikanter Unterschied. Insgesamt mag dies auch damit zusammenhängen, daß mit dem risikolosen Zinssatz nur in einem Fall ein zeitvariabler Target gewählt wurde.

³Homaifar und Graddy (1991) ermitteln, daß bei 45 US-amerikanischen Aktien während des Zeitraums von 1961 bis 1981 häufiger negative Differenzen zwischen CAPM-Beta und LPM_{2,r_f} -Beta auftreten als positive Differenzen.

Tabelle 2: Unterschiede zwischen CAPM- und LPM_{2,τ}-Beta

Differenz der Betas	Mittelwert
$\hat{\beta}^{\text{CAPM}} - \hat{\beta}^{\text{LPM}_{2,r_f}}$	-0,0267***
$\hat{\beta}^{\text{LPM}_{2,r_f}} - \hat{\beta}^{\text{LPM}_{2,R_M}}$	0,0031***
$\hat{\beta}^{\text{LPM}_{2,R_M}} - \hat{\beta}^{\text{LPM}_{2,0}}$	-0,0021**
$\hat{\beta}^{\text{LPM}_{2,r_f}} - \hat{\beta}^{\text{LPM}_{2,0}}$	0,0010

* Signifikanz auf dem 10 %-Niveau
** Signifikanz auf dem 5 %-Niveau
*** Signifikanz auf dem 1 %-Niveau

Die Abbildungen 5 bis 7 machen die genannten Sachverhalte noch einmal deutlich. Diese Abbildungen veranschaulichen die Differenzen zwischen den jeweiligen Beta-Koeffizienten für Portefeuilles mit Fünfer-Gruppen. Hierbei erfolgt die Gruppierung im Hinblick auf den jeweils erstgenannten Betakoeffizienten. Die Skalierung wird beim Vergleich der LPM_{2,τ}-Betas beibehalten, um die geringen Unterschiede zu visualisieren. Hierbei erkennt man folgendes:

- 1) Die Unterschiede zwischen CAPM- und LPM_{2,r_f}-Beta bewegen sich im Bereich zwischen 0,03 und -0,08. Sie sind nur für die Gruppen drei bis fünf positiv. Die Differenzen scheinen mit dem Betakoeffizienten größer zu werden.
- 2) Die Differenzen zwischen LPM_{2,r_f}- und LPM_{2,R_M}-Beta betragen zwischen 0,01 und -0,002 und sind mit drei betraglich kleinen Ausnahmen immer positiv.
- 3) Die Abweichungen von LPM_{2,R_M}- und LPM_{2,0}-Beta sind nicht mehr so eindeutig. Die Differenzen schwanken zwischen 0,007 und -0,01 und sind in der Mehrzahl negativ.

Abbildung 5: Unterschiede zwischen CAPM- und LPM_{2,r_f} -Beta

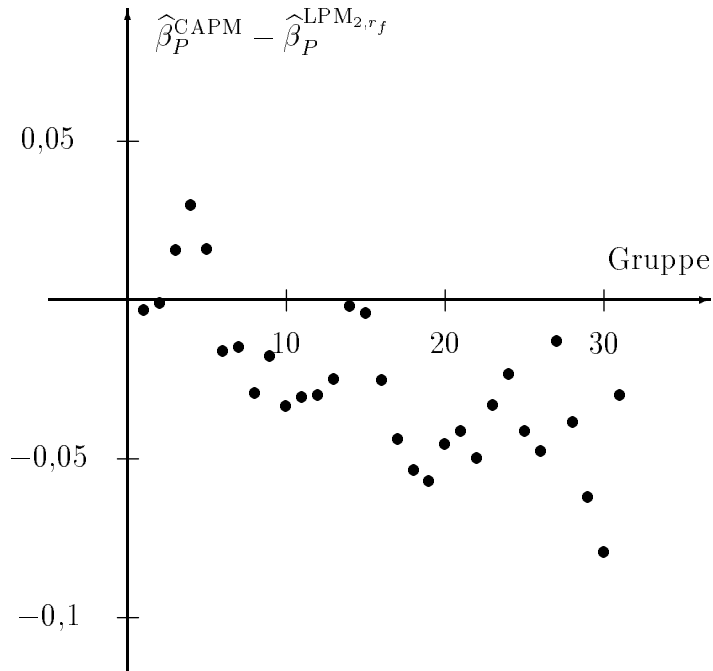


Abbildung 6: Unterschiede zwischen LPM_{2,r_f} - und LPM_{2,R_M} -Beta

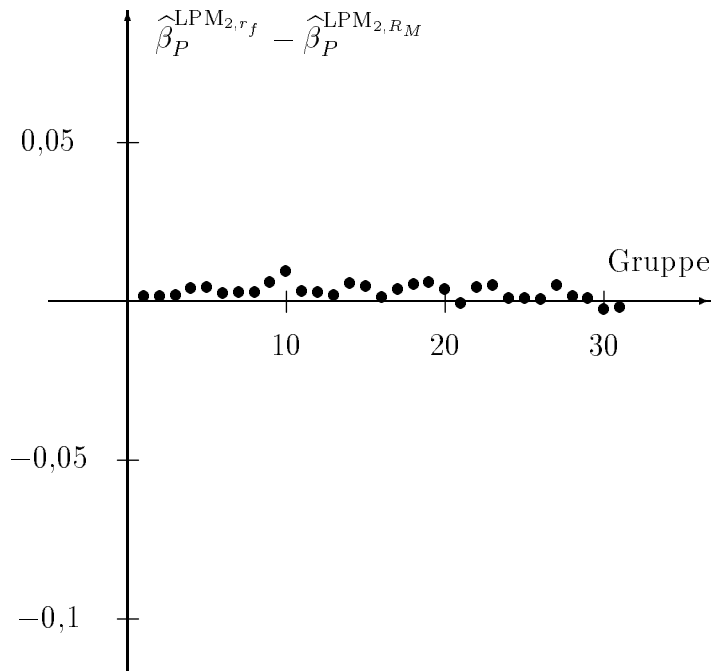
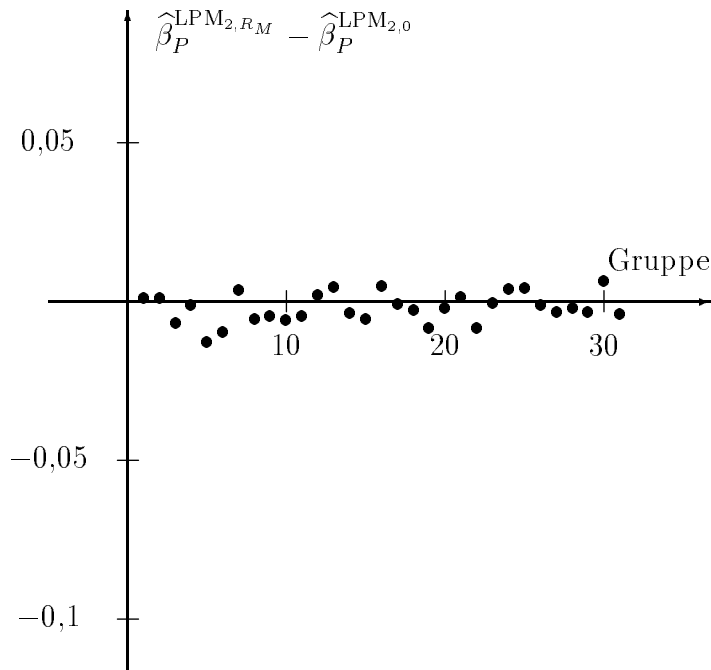


Abbildung 7: Unterschiede zwischen LPM_{2,R_M} - und $LPM_{2,0}$ -Beta



Die empirischen Wertpapierkennlinien sowohl für das CAPM als auch für die $LPM_{2,\tau}$ -Modelle weisen eine negative Risikoprämie und eine zu hohe risikolose Rendite auf. Wir wollen dieses Ergebnis im Hinblick auf drei Aspekte untersuchen:

- 1) Die Beziehung zwischen mittleren Wertpapierrenditen und jeweiligen Betakoeffizienten könnte entgegen der Aussage von CAPM bzw. LPM-Modell nichtlinear sein. Um dies zu überprüfen, ergänzen wir die Regressionsgleichung (14) um den quadrierten Betakoeffizienten und testen die Hypothese, daß kein quadratischer Einfluß vorliegt. Die Regressionsgleichung lautet nun:

$$\begin{aligned} \hat{r}_i &= \gamma_0 + \gamma_1 \cdot \hat{\beta}_i^{\text{CAPM}} + \gamma_2 \cdot (\hat{\beta}_i^{\text{CAPM}})^2 + \eta_i \quad \text{bzw.} & (15) \\ \hat{r}_i &= \gamma_0 + \gamma_1 \cdot \hat{\beta}_i^{\text{LPM}_{2,\tau}} + \gamma_2 \cdot (\hat{\beta}_i^{\text{LPM}_{2,\tau}})^2 + \eta_i. \end{aligned}$$

Tabelle 3 enthält hierzu folgendes Ergebnis: Die Hypothese, der Zusammenhang zwischen mittlerer Wertpapierrendite und Betakoeffizient sei linear, muß, wenn auch auf unterschiedlichem Signifikanzniveau, für die $LPM_{2,\tau}$ -Modelle durchweg abgelehnt werden. Die F-Tests für das Bestimmtheitsmaß zeigen zudem, daß die Regression mit quadriertem Beta für die $LPM_{2,\tau}$ -Modelle bei gruppierten

Portefeuilles im Gegensatz zum CAPM eine hohe Erklärungskraft besitzt. Diese Beobachtung deckt sich mit dem Ergebnis der einfachen linearen Regression. Die Unterschiede innerhalb der LPM_{2,τ}-Modelle fallen jedoch sowohl im Hinblick auf die Werte als auch auf die Signifikanzniveaus etwas höher aus.

Tabelle 3: **Quadratischer Einfluß von CAPM- bzw. LPM_{2,τ}-Beta**

Modell	$\hat{\gamma}_0$	$\hat{\gamma}_1$	$\hat{\gamma}_2$	R ²
Einzelbetas				
CAPM	4,16 %*	-0,39 %	-2,18 %	4,13 %**
LPM _{2,r_f}	4,88 %**	2,01 %	-5,45 %*	15,02 %***
LPM _{2,r_M}	4,94 %**	1,79 %	-5,32 %*	15,04 %***
LPM _{2;0}	4,87 %**	1,86 %	-5,29 %*	14,55 %***
Fünfer-Gruppen				
CAPM	3,84 %	0,48 %	-2,69 %	14,44 %
LPM _{2,r_f}	3,97 %*	4,62 %	-7,02 %**	48,16 %***
LPM _{2,r_M}	4,38 %**	3,16 %	-6,04 %**	51,48 %***
LPM _{2;0}	3,84 %**	4,79 %	-7,05 %**	53,38 %***
Zehner-Gruppen				
CAPM	3,79 %	0,18 %	-2,24 %*	25,98 %
LPM _{2,r_f}	3,88 %	4,94 %	-7,27 %**	71,03 %***
LPM _{2,r_M}	4,77 %**	1,76 %	-5,05 %*	70,47 %***
LPM _{2;0}	3,60 %	5,64 %	-7,65 %**	71,84 %***

* Signifikanz auf dem 10 %-Niveau
** Signifikanz auf dem 5 %-Niveau
*** Signifikanz auf dem 1 %-Niveau

- 2) Mit dem Marktportefeuille besitzen CAPM und LPM-Modelle einen systematischen Risikofaktor. Tatsächlich können die Wertpapierrenditen auch mikroökonomische Risikofaktoren aufweisen. Titelspezifische Risiken schlagen sich in der Varianz des Residuums nieder, und die Residualvarianzen besitzt dann Erklärungskraft für die mittleren Wertpapierrenditen.

Zudem muß in der Querschnittsregression anstelle des wahren Betakoeffizienten der Schätzer aus der Längsschnittsregression verwendet werden. Ein mögliche Folge besteht wiederum darin, daß die unsystematischen Risiken scheinbar Erklärungskraft für die mittleren Renditen besitzen. Die Gruppierung der Wertpapiere zu Portefeuilles anhand des Betakoeffizienten reduziert entstehende Verzerrungen.

Wir wollen daher überprüfen, ob die unsystematischen Risiken auch bei gruppierten Portefeuilles einen Einfluß auf die mittleren Wertpapierrenditen ausüben, und ergänzen die Regressionsgleichung (14) wie folgt:

$$\begin{aligned}\hat{r}_i &= \gamma_0 + \gamma_1 \cdot \hat{\beta}_i^{\text{CAPM}} + \delta \cdot \hat{\sigma}^2(\epsilon_i^{\text{CAPM}}) + \eta_i \quad \text{bzw.} \\ \hat{r}_i &= \gamma_0 + \gamma_1 \cdot \hat{\beta}_i^{\text{LPM}_{2,\tau}} + \delta \cdot \hat{\sigma}^2(\epsilon_i^{\text{LPM}_{2,\tau}}) + \eta_i.\end{aligned}\quad (16)$$

Tabelle 4 zeigt, daß die Residualvarianzen aus der Zeitreihenanalyse für gruppierte Portefeuilles insbesondere bei den LPM_{2,τ}-Modellen keinen signifikanten Einfluß auf die mittleren Renditen ausüben. Wiederum liegen hier deutlich höhere Bestimmtheitsmaße vor als beim CAPM. Im Vergleich mit der einfachen linearen Regression sind trotz größerer Unterschiede innerhalb der LPM_{2,τ}-Modelle insgesamt die Differenzen zum CAPM wiederum deutlich.

Tabelle 4: **Einfluß der unsystematischen Risikos**

Modell	$\hat{\gamma}_0$	$\hat{\gamma}_1$	$\hat{\delta}$	R ²
Einzelbetas				
CAPM	8,73 %***	-3,07 %**	-8,63***	17,61 %***
LPM _{2,r_f}	9,72 %***	-6,18 %***	-5,33**	17,97 %***
LPM _{2,r_M}	9,71 %***	-6,19 %***	-5,31**	18,03 %***
LPM _{2;0}	9,70 %***	-6,10 %***	-5,42**	17,84 %***
Fünfer-Gruppen				
CAPM	10,13 %***	-2,73 %*	-12,20***	38,64 %***
LPM _{2,r_f}	10,53 %***	-5,92 %***	-7,60*	47,23 %***
LPM _{2,r_M}	10,04 %***	-5,84 %***	-6,68*	50,92 %***
LPM _{2;0}	7,14 %***	-6,44 %***	-0,89	43,27 %***
Zehner-Gruppen				
CAPM	8,20 %***	-2,77 %	-7,93	34,09 %*
LPM _{2,r_f}	5,52 %	-7,51 %***	-6,24	60,86 %***
LPM _{2,r_M}	7,50 %**	-6,69 %***	-0,39	63,22 %***
LPM _{2;0}	3,69 %	-7,68 %***	-10,63	64,43 %***

* Signifikanz auf dem 10 %-Niveau
 ** Signifikanz auf dem 5 %-Niveau
 *** Signifikanz auf dem 1 %-Niveau

- 3) Das gewöhnliche Verfahren der linearen Regression setzt eine konstante Varianz der Residuen voraus. Liegt Heteroskedastizität vor, sind die OLS-Schätzer zwar

noch erwartungstreu, jedoch nicht mehr beste Schätzer in dem Sinne, daß sie die geringste Varianz besitzen. Die für Signifikanztests benötigten t-Werte aus der OLS-Regression können dann zu Fehlaussagen führen. Gerade bei ökonomischen Daten beobachtet man dabei häufig zu geringe Standardfehler.

Die Residuenplots der Querschnittsregressionen gestatten keine augenscheinliche Vorabspezifikation des Zusammenhangs zwischen Residualvarianz und Betakoeffizient. Wir verwenden deshalb den allgemeinen White-Test auf Heteroskedastizität. Hierzu ist zunächst die folgende Regression durchzuführen:

$$\hat{\eta}_i^2 = \delta_0 + \delta_1 \cdot \hat{r}_i + \delta_2 \cdot \hat{r}_i^2 + \zeta_i. \quad (17)$$

Das Bestimmtheitsmaß dieser Regression multipliziert mit der Anzahl an Beobachtungen, $n \cdot R^2$, ist asymptotisch χ^2 -verteilt mit zwei Freiheitsgraden. Einer χ^2 -Verteilungstabelle entnimmt man den kritischen Wert von 4,6052 für das 10 %-Signifikanzniveau. Keine der Hilfsregressionen liefert für die betrachteten Modelle ein Bestimmtheitsmaß, das zu einer Ablehnung der Hypothese homoskedastischer Residuen führt.

Tabelle 5 vergleicht die Schätzer für die Koeffizienten der gewöhnlichen linearen Regression mit den heteroskedastizitätskonsistenten White-Schätzern. Die Tabelle enthält die Fehlerwahrscheinlichkeiten zu den ermittelten t-Werten. Man erkennt, daß sich keine bedeutsamen Unterschiede ergeben. Heteroskedastizität spielt in der Querschnittsregression für unsere Stichprobe keine Rolle.

Sowohl das CAPM als auch das LPM-Modell liefern Ex ante-Bewertungsgleichungen, die für erwartete Größen formuliert sind. Die zukünftigen Renditen sollten sich deshalb aufgrund der jeweiligen Betakoeffizienten ergeben. Wir unterteilen daher den betrachteten 10-Jahres-Zeitraum in die Subperioden von 1985 bis 1989 und 1990 bis 1994. Um die Erklärungskraft der Betakoeffizienten zu bestimmen, werden dann die mittleren Renditen der zweiten Subperiode auf die Betakoeffizienten der ersten Subperiode regressiert. Um den Fehler in der Variablen zu reduzieren, betrachten wir auch hier wieder gruppierte Portefeuilles. Weil die Gruppierung anhand der Betakoeffizienten erfolgt, beziehen sich die mittleren Portefeuillerenditen der zweiten Subperiode auf die Einteilung aus der ersten Subperiode.

Tabelle 6 enthält die empirischen Ergebnisse zum Vergleich des CAPM mit den $LPM_{2,\tau}$ -Modellen im Hinblick auf die Erklärungskraft des Betakoeffizienten für zukünftige Renditen. Die Daten wiederholen in weiten Teilen die Resultate aus Tabelle 1. Zwar ergeben sich nun negative, aber nicht signifikant von null verschiedene

Tabelle 5: **Signifikanz heteroskedastizitätskonsistenter Schätzer**

Modell	ohne Korrektur		mit Korrektur	
	$\hat{\gamma}_0$	$\hat{\gamma}_1$	$\hat{\gamma}_0$	$\hat{\gamma}_1$
Einzelbetas				
CAPM	< 0,01 %	1,40 %	< 0,01 %	1,11 %
LPM _{2,r_f}	< 0,01 %	< 0,01 %	< 0,01 %	< 0,01 %
LPM _{2,r_M}	< 0,01 %	< 0,01 %	< 0,01 %	< 0,01 %
LPM _{2;0}	< 0,01 %	< 0,01 %	< 0,01 %	< 0,01 %
Fünfer-Gruppen				
CAPM	0,17 %	4,50 %	0,03 %	1,60 %
LPM _{2,r_f}	< 0,01 %	0,02 %	< 0,01 %	0,07 %
LPM _{2,r_M}	< 0,01 %	< 0,01 %	< 0,01 %	0,02 %
LPM _{2;0}	< 0,01 %	< 0,01 %	< 0,01 %	0,05 %
Zehner-Gruppen				
CAPM	0,39 %	5,38 %	0,66 %	4,41 %
LPM _{2,r_f}	< 0,01 %	0,05 %	0,02 %	0,23 %
LPM _{2,r_M}	< 0,01 %	0,02 %	< 0,01 %	0,04 %
LPM _{2;0}	< 0,01 %	0,06 %	0,05 %	0,36 %

Ordinatenabschnitte der geschätzten Wertpapierkennlinien. Trotzdem sind die Absoluterme der Regressionsgeraden bei den LPM_{2,τ}-Modellen größer als beim CAPM. Die Steigungen der LPM_{2,τ}-Regressionsgeraden sind nahezu identisch mit denen aus der Regression über den gesamten 10-Jahres-Zeitraum und wiederum negativ. Die CAPM-Steigungskoeffizienten bewegen sich nun im Gegensatz zu den Werten aus Tabelle 3 auf ähnlichem Niveau.

Dieses Bild setzt sich beim Bestimmtheitsmaß fort: Gegenüber den Regressionen über den gesamten Zeitraum ist der R²-Wert beim CAPM gestiegen, bei den LPM_{2,τ}-Modellen hingegen gefallen. Trotzdem besitzen die LPM_{2,τ}-Modelle eine deutlich höhere Erklärungskraft für den Querschnitt mittlerer Wertpapierrenditen.

Die Abbildungen 8 und 9 veranschaulichen die Ergebnisse für das CAPM und das LPM_{2,r_f}-Modell unter Verwendung von Fünfer-Portefeuilles. Mit negativen Risikoprämien des Kapitalmarktes von -6,15 % bzw. -6,56 % und Renditeachsenabschnitten von -1,90 % bzw. -1,33 % ergeben sich nur geringe Unterschiede in den Regressionsgeraden. Die Bestimmtheitsmaße von 17,48 % und 22,67 % lassen die Punktwolken ebenfalls ähnlich erscheinen.

Tabelle 6: Empirischer Ex ante-Vergleich von CAPM und LPM_{2,τ}-Modell

Modell	γ_0	γ_1	R ²
Einzelbetas			
CAPM	-2,03 %	-5,98 % ^{***}	5,45 %
LPM _{2,r_f}	-1,25 %	-6,66 % ^{***}	7,64 %
LPM _{2,R_M}	-1,50 %	-6,44 % ^{***}	7,24 %
LPM _{2,0}	-1,20 %	-6,70 % ^{***}	7,72 %
Fünfer-Gruppen			
CAPM	-1,90 %	-6,15 % ^{**}	17,48 %
LPM _{2,r_f}	-1,33 %	-6,56 % ^{***}	22,67 %
LPM _{2,R_M}	-1,60 %	-6,30 % ^{***}	34,06 %
LPM _{2,0}	-1,22 %	-6,68 % ^{***}	23,60 %
Zehner-Gruppen			
CAPM	-2,41 %	-5,39 % ^{**}	27,00 %
LPM _{2,r_f}	-1,24 %	-6,65 % ^{***}	42,29 %
LPM _{2,R_M}	-1,50 %	-6,40 % ^{***}	56,32 %
LPM _{2,0}	-1,19 %	-6,69 % ^{***}	43,69 %

* Signifikanz auf dem 10 %-Niveau
 ** Signifikanz auf dem 5 %-Niveau
 *** Signifikanz auf dem 1 %-Niveau

Abbildung 8: Geschätzte Ex ante-CAPM-Wertpapierkennlinie

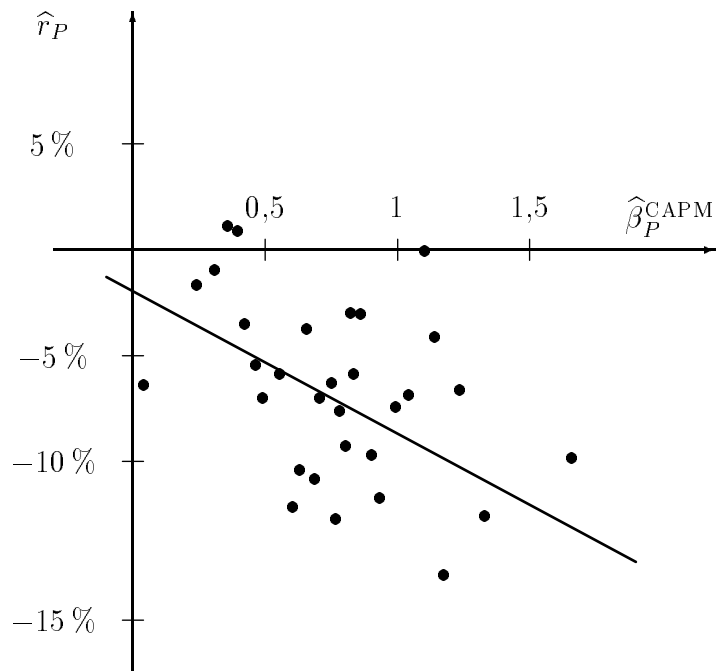
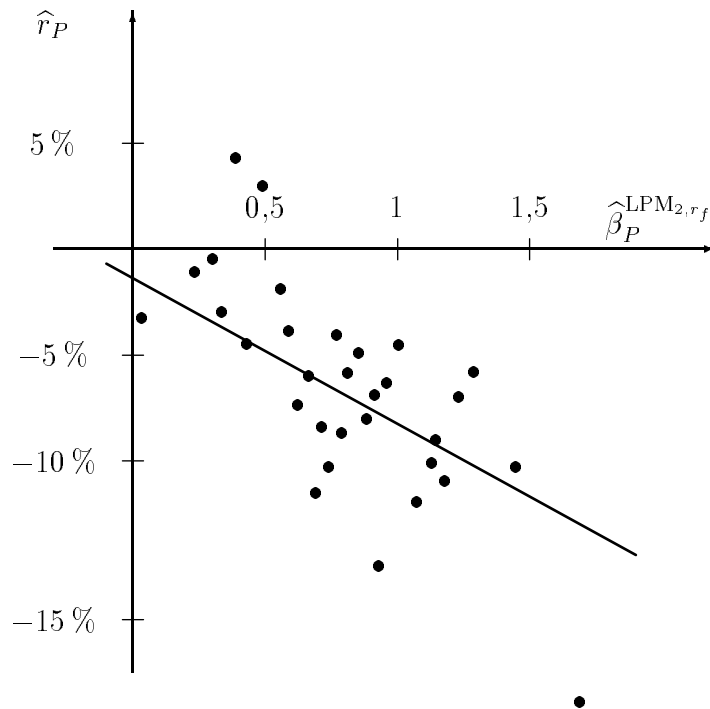


Abbildung 9: Geschätzte Ex ante-LPM_{2,r_f}-Wertpapierkennlinie



Beim CAPM handelt es sich wie bei den LPM-Modellen um Ein-Perioden-Modelle. Für die empirische Überprüfung ist deshalb die Stationarität der Betakoeffizienten wichtig. So setzen die verwendeten Regressionen konstante Betas voraus. In Tabelle 7 sind deshalb die Mittelwert der Differenzen der Betakoeffizienten aus den beiden Subperioden angegeben. Als Hilfsgröße dient hierbei $z_i \equiv \hat{\beta}_i^{1985-1989} - \hat{\beta}_i^{1990-1994}$.

Tabelle 7: Stationarität der Betakoeffizienten

Beta	Mittelwert der Differenzen aus den Subperioden
β^{CAPM}	-0,0629**
$\beta^{\text{LPM}_{2,r_f}}$	-0,0373
$\beta^{\text{LPM}_{2,R_M}}$	-0,0438
$\beta^{\text{LPM}_{2,0}}$	-0,0306

* Signifikanz auf dem 10 %-Niveau
 ** Signifikanz auf dem 5 %-Niveau
 *** Signifikanz auf dem 1 %-Niveau

Unabhängig vom verwendeten Modell sind die Betakoeffizienten aus der zweiten Subperiode im Mittel größer als die Koeffizienten aus der ersten Subperiode. Lediglich beim CAPM-Beta ergeben sich aber signifikante Unterschiede. Dies deutet darauf hin, daß die LPM_{2,τ}-Betas stabiler sind.

Die Abbildungen 10 und 11 veranschaulichen die Differenzen der Betakoeffizienten für die beiden betrachteten Subperioden unter Verwendung von Fünfer-Portefeuilles. Als Kriterium für die Gruppierung dienen wiederum die Betakoeffizienten aus dem ersten 5-Jahres-Zeitraum. Für die Gruppen mit den kleinsten und größten Betakoeffizienten übersteigt das Beta aus der ersten Subperiode das Beta aus der zweiten Periode. Für die Mehrzahl der Gruppen steigt aber der Betakoeffizient von der ersten zur zweiten Subperiode.

Abbildung 10: Stationarität der CAPM-Betas

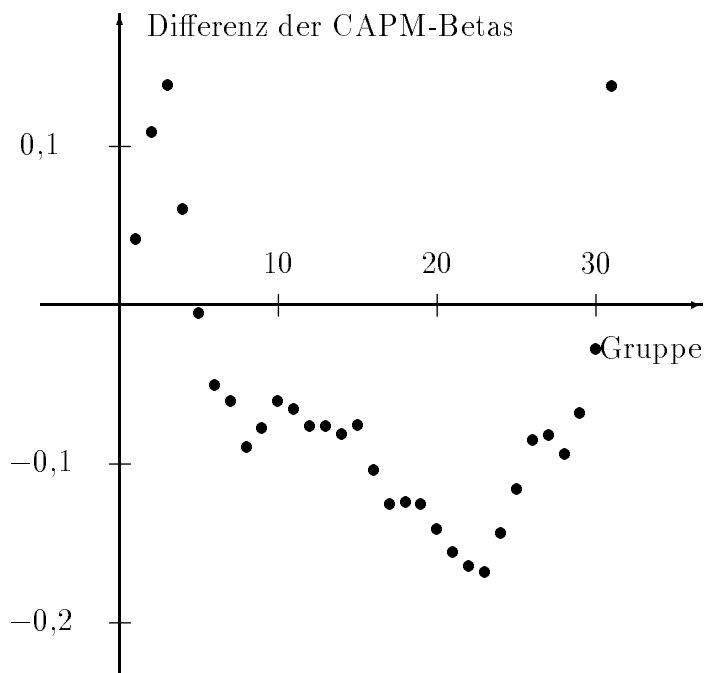
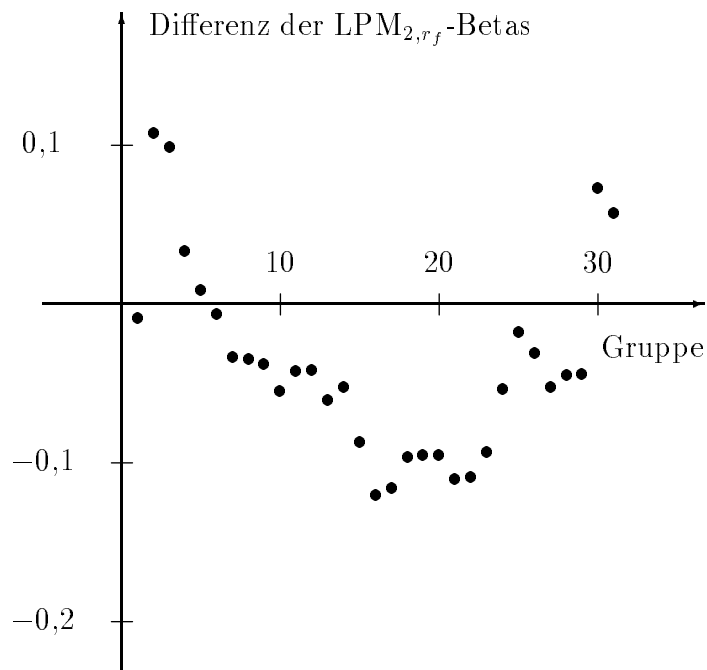


Abbildung 11: Stationarität der LPM_{2,r_f} -Betas



6 Zusammenfassung der empirischen Ergebnisse

Die empirischen Ergebnisse zum Vergleich des CAPM mit den $LPM_{2,\tau}$ -Modellen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- 1) Für den Zeitraum von 1985 bis 1994 weisen die geschätzten Wertpapierkennlinien sowohl signifikant positive Renditenachsenabschnitte als auch signifikant negative Risikoprämien auf. Dies gilt mit noch höherer Signifikanz für die $LPM_{2,\tau}$ -Modelle als für das CAPM. Die Wahl des Targets hat nur einen vernachlässigbaren Einfluß auf die geschätzte Wertpapierkennlinie. Dieses Resultat spricht gegen die Gültigkeit beider Bewertungsmodelle, wenngleich der betrachtete 10-Jahres-Zeitraum als zu kurz für eine endgültige Falsifikation erscheint. Für die Verwendung der $LPM_{2,\tau}$ -Modelle spricht ihre gemessen am Bestimmtheitsmaß höhere Erklärungskraft für die mittleren Wertpapierrenditen.
- 2) Dieses Bild setzt sich fort, wenn zusätzlich die Erklärungskraft der quadrierten Betakoeffizienten auf den Renditequerschnitt überprüft wird. Für unsere Stichprobe können wir nicht von einem linearen Zusammenhang zwischen Betakoeffizi-

ent und erwarteter Rendite ausgehen. Das unsystematische Risiko stellt hingegen keinen bewerteten Faktor dar.

- 3) Die CAPM-Betas sind gegenüber den $LPM_{2,\tau}$ -Betas systematisch nach unten verzerrt. Die Hypothese, die $LPM_{2,\tau}$ -Betas seien für alle Targets gleich, kann zwar im Mittel nicht immer aufrecht erhalten werden. Verschiedene Targets führen aber nur zu Bewertungsdifferenzen von bis zu zwei Basispunkten. Letztere sind um den Faktor zehn kleiner als gegenüber dem CAPM.
- 4) Wird der Einfluß der Betakoeffizienten aus dem ersten 5-Jahres-Zeitraum auf die mittlere Rendite der Jahre 1990 bis 1994 betrachtet, ergibt sich gegenüber dem gesamten Zeitraum ein Unterschied durch negative, aber nicht signifikante Renditeachsenabschnitte der geschätzten Wertpapierkennlinien. Die Unterschiede zwischen CAPM und $LPM_{2,\tau}$ -Modellen treten nicht mehr so deutlich zutage. Die höhere Erklärungskraft der $LPM_{2,\tau}$ -Modelle bleibt aber erhalten.
- 5) Der Vergleich der Betakoeffizienten aus beiden 5-Jahres-Zeiträumen gibt einen Hinweis auf höhere Stabilität der $LPM_{2,\tau}$ -Betas. Die Unterschiede sind im Mittel gegenüber den CAPM-Betas um ein Drittel kleiner. Die mittlere Differenz ist nur bei den CAPM-Betas signifikant.

A Beweis von Satz 4

Der Beweis dieses Satz erfolgt getrennt für die Ausfallerwartung und die Ausfallvarianz. Wir definieren aber zunächst die Hilfsfunktionen:

$$H_1(\tau) \equiv F(\tau) - G(\tau); \quad H_2(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\tau} F(x) - G(x) dx = \int_{-\infty}^{\tau} H_1(x) dx;$$

$$H_3(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\tau} \int_{-\infty}^y F(x) - G(x) dx dy = \int_{-\infty}^{\tau} \int_{-\infty}^y H_1(x) dx dy = \int_{-\infty}^{\tau} H_2(y) dy.$$

Diese Hilfsfunktionen besitzen folgende Eigenschaften:

$$\lim_{R \rightarrow -\infty} H_1(R) = \lim_{R \rightarrow -\infty} H_2(R) = \lim_{R \rightarrow -\infty} H_3(R) = \lim_{R \rightarrow \infty} H_1(R) = 0$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} H_2(R) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(x) - G(x) dx \\ &= x \cdot F(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) - x \cdot G(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} x dG(x) \\ &= E(R_G) - E(R_F). \end{aligned}$$

Offenbar gilt Satz 4 für Verteilungen, die keinen Schnittpunkt aufweisen. Sei nun der Schnittpunkt mit R^* bezeichnet, und es gelte:

$$F(R) \begin{cases} < \\ \equiv \\ > \end{cases} G(R) \quad \forall R \begin{cases} < \\ \equiv \\ > \end{cases} R^*.$$

1) Für die Ausfallerwartung besitzt die Dominanz folgende Implikationen:

i) Aus dem Vergleich der erwarteten Renditen folgt:

$$\begin{aligned} E(R_F) - E(R_G) &\geq 0 \\ \Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} H_2(R) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) - G(x) dx = E(R_G) - E(R_F) &\leq 0 \\ \Rightarrow H_2(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} F(x) - G(x) dx &\leq 0 \quad \forall \tau \geq R^*. \end{aligned}$$

ii) Aus der niedrigeren Ausfallerwartung folgt:

$$\begin{aligned} & \text{LPM}_{1,F}(\tau_0) - \text{LPM}_{1,G}(\tau_0) < 0 \\ \Rightarrow & \int_{-\infty}^{\tau_0} \tau_0 - x dF(x) - \int_{-\infty}^{\tau_0} \tau_0 - x dG(x) < 0 \\ \Rightarrow & \int_{-\infty}^{\tau_0} \tau_0 - x dH_1(x) < 0 \Rightarrow H_2(\tau) < 0 \quad \forall \tau < R^*, \\ & \text{denn } H_2'(\tau) = H_1(\tau) < 0 \quad \forall \tau < R^*. \end{aligned}$$

Damit liegt stochastische Dominanz zweiter Ordnung vor, die für Nutzenfunktionen aus der Klasse \mathcal{U}_2 äquivalent ist zur Dominanz in der Ausfallerwartung:

$$\text{i) und ii) } \Leftrightarrow F \succ G \Leftrightarrow \text{LPM}_{1,F}(\tau) \leq \text{LPM}_{1,G}(\tau) \quad \forall \tau, u(R) \in \mathcal{U}_2.$$

2) Bezüglich der Ausfallvarianz folgt aus der vorausgesetzten Dominanz:

i) Die höhere erwartete Rendite impliziert:

$$\begin{aligned} & E(R_F) - E(R_G) \geq 0 \\ \Rightarrow & H_2(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} F(x) - G(x) dx \leq 0 \quad \forall \tau \geq R^* \\ & \Rightarrow \int_{R^*}^{\tau} H_2(x) dx \leq 0. \end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} F(R) - G(R) & \leq 0 \quad \forall R \leq R^* \Rightarrow H_3(R^*) \leq 0 \\ \Rightarrow & H_3(\tau) = H_3(R^*) + \int_{R^*}^{\tau} H_2(x) dx \leq 0. \end{aligned}$$

ii) Die niedrigere Ausfallvarianz impliziert:

$$\begin{aligned} & \text{LPM}_{2,F}(\tau_0) - \text{LPM}_{2,G}(\tau_0) < 0 \\ \Rightarrow & \int_{-\infty}^{\tau_0} (\tau_0 - x)^2 dF(x) - \int_{-\infty}^{\tau_0} (\tau_0 - x)^2 dG(x) < 0 \\ \Rightarrow & \int_{-\infty}^{\tau_0} (\tau_0 - x)^2 dH_1(x) < 0 \Rightarrow H_3(\tau) < 0 \quad \forall \tau < R^*. \end{aligned}$$

Damit liegt stochastische Dominanz dritter Ordnung vor, die für Nutzenfunktionen aus der Klasse \mathcal{U}_3 äquivalent ist zur Dominanz in der Ausfallvarianz:

$$\text{i) und ii) } \Leftrightarrow F \succ G \Leftrightarrow \text{LPM}_{2,F}(\tau) \leq \text{LPM}_{2,G}(\tau) \quad \forall \tau, u(R) \in \mathcal{U}_3.$$

Literatur:

ARZAC, E.R.; BAWA, V.S. (1977): Portfolio Choice and Equilibrium in Capital Markets with Safty-first Investors, *Journal of Financial Economics* 4, S. 277–288.

BAWA, V.S. (1975): Optimal Rules for Ordering Uncertain Prospects, *Journal of Financial Economics* 2, 95–121.

BAWA, V.S. (1978): Safety-First, Stochastic Dominance, and Optimal Portfolio Choice, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 13, 255–271.

BAWA, V.S.; LINDENBERG, E.B. (1977): Capital Market Equilibrium in a Mean-Lower Partial Moment Framework, *Journal of Financial Economics* 5, 189–200.

CHOW, K.V.; DENNING; K.C. (1994): On Variance and Lower Partial Moment Betas: The Equivalence of Systematic Risk Measures, *Journal of Business Finance & Accounting* 21, 231–241.

FAMA, E.F.; FRENCH, K.R. (1992): The Cross-Section of Expected Stock Returns, *Journal of Finance* 47, 427–465.

HARLOW, W.V.; RAO, R.K.S. (1989): Asset Pricing in a Generalized Mean-Lower Partial Moment Framework: Theory and Evidence, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 24, 285–311.

HOGAN, W.W.; WARREN, J.M. (1974): Toward the Development of an Equilibrium Capital-Market Model Based on Semivariance, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 9, S. 1–11.

HOMAI FAR, G.; GRADDY, D.B. (1990): Variance and Lower Partial Moment Betas as Alternative Risk Measures in Cost of Capital Estimation: A Defense of the CAPM Beta, *Journal of Business Finance & Accounting* 17, 677–688.

HOMAI FAR, G.; GRADDY, D.B. (1991): Variance and Lower Partial Moment Betas as Bases for Costing Equity Capital among Regulated Utilities, *Applied Economics* 23, S. 1771–1777.

JAHANKHANI, A. (1976): E-V and E-S Capital Asset Pricing Models: Some Empirical Results, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 11, S. 513–528.

KADUFF, J.V. (1996): *Shortfall-Risk-basierte Portfolio-Strategien*, Bern, Stuttgart, Wien: Haupt.

LEE, W.Y.; RAO, R.K.S. (1988): Mean Lower Partial Moment Valuation and Lognormally Distributed Returns, *Management Science* 34, S. 446–453.

MEYER, J. (1987): Two-Moment Decision Models and Expected Utility Maximization, *American Economic Review* 77, 421–430.

NANTELL, T.J.; PRICE, B. (1979): An Analytic Comparison of Variance and Semivariance Capital Market Theories, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 14, S. 221–242.

PORTER, R.B.; BEY, R.P.; LEWIS, D.C. (1975): The Development of a Mean-Semivariance Approach to Capital Budgeting, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 10, S. 639–649.

PRICE, K.; PRICE, B.; NANTELL, T.J. (1982): Variance and Lower Partial Moment Measures of Systematic Risk: Some Analytical and Empirical Results, *Journal of Finance* 37, 843–855.

ROLL, R.; ROSS, S.A. (1994): On the Cross-sectional Relation between Expected Returns and Betas, *Journal of Finance* 49, 101–121.

ROSS, S.A. (1978): Mutual Fund Separation in Financial Theory — The Separating Distributions, *Journal of Economic Theory* 17, 254–286.